

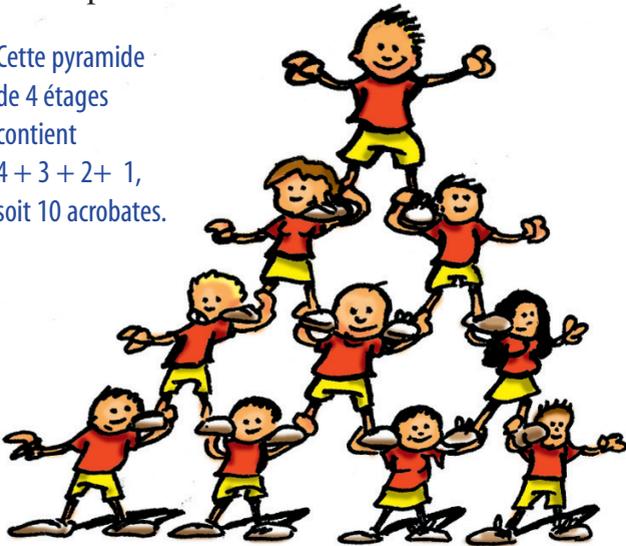
La puissance des puissances

Cette après-midi là, Alice accueillit Matt avec le beau sourire qu'elle avait lorsqu'elle pensait à une question amusante qui obligeait à une réflexion inhabituelle.



Tu te souviens du spectacle de cirque où nous avons vu une pyramide humaine de quatre étages ? Elle montait presque jusqu'au sommet du chapiteau...

Cette pyramide de 4 étages contient $4 + 3 + 2 + 1$, soit 10 acrobates.



— Oui, bien sûr, et tu as prétendu que cela posait un « joli » problème de mathématique.

Question
Jeu

Combien d'acrobates faudrait-il pour une pyramide de 10 étages ?

Et pour une, aussi haute que la Tour Eiffel, qui nécessiterait près de 200 étages ?

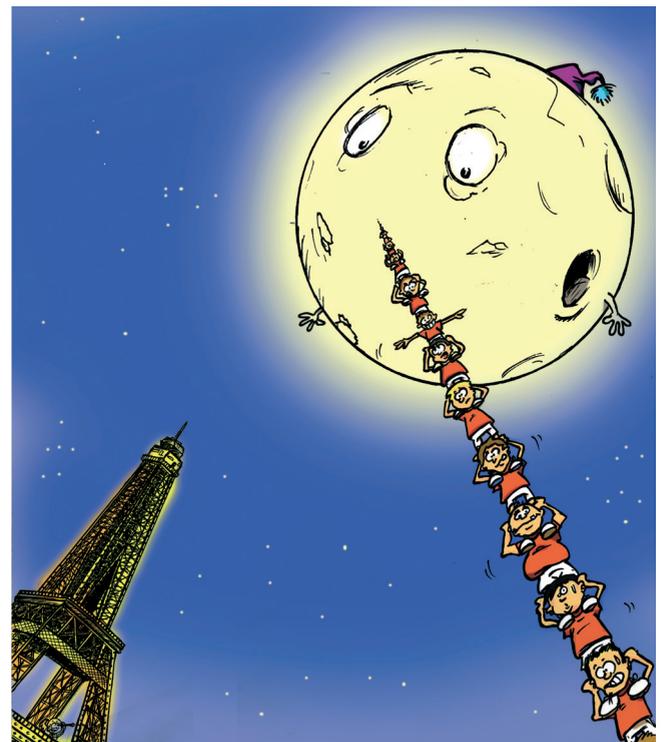


La question que je me pose aujourd'hui est beaucoup plus facile :

Si un milliard d'acrobates grimpaient les uns sur les autres, est-ce qu'ils atteindraient la Lune ?

Bien sûr, pour simplifier, je suppose qu'ils tiendraient l'un sur l'autre par une sorte de miracle de l'équilibre...

— Admettons, tu peux tout supposer, du moment que tu imagines atteindre la Lune ! Allez, on fait le calcul...





Simplifions les données : disons que chaque acrobate fait gagner 1,50 mètre de hauteur.

Il n'y a qu'une multiplication à faire : $1,50 \times 1\ 000\ 000\ 000$ mètres. [1 milliard, c'est mille fois mille fois mille, cela s'écrit avec 3 fois trois zéros, donc 9 zéros.]

1000 mètres, c'est 1 kilomètre.

La pyramide d'acrobates atteint donc $1,5 \times 1\ 000\ 000$ kilomètres, soit 1,5 million de kilomètres.

[1 million, c'est mille fois mille, cela s'écrit avec 2 fois trois zéros, donc 6 zéros.]

La pyramide monte à 1,5 million de kilomètres.

La Lune est environ à 400 000 kilomètres de la Terre, c'est-à-dire à 0,4 million de kilomètres, soit environ trois fois moins.

La réponse est donc **oui** ! Et plutôt largement.

Bravo les acrobates !



À moi de te poser une question, dit Matt avec malice.

Je te rapporte la valise que tu m'as prêtée pour partir chez ma grand-mère. Elle mesure 20 cm de large pour un fond de 40 cm sur 50 cm. Cela fait un volume de...



Attends, dit Alice, prends la bonne unité : le décimètre cube. Avec lui les dimensions de ta valise sont 2, 4 et 5.

Le volume est donc de $2 \times 4 \times 5$ soit 40 dm³, ou encore 40 litres.

[INFO : 1 dm³ = 1 litre]

Si tu la remplissais d'eau, elle pèserait 40 kg !



Heureusement que mes affaires pèsent moins que de l'eau. Mais c'est un autre calcul que je veux te suggérer :

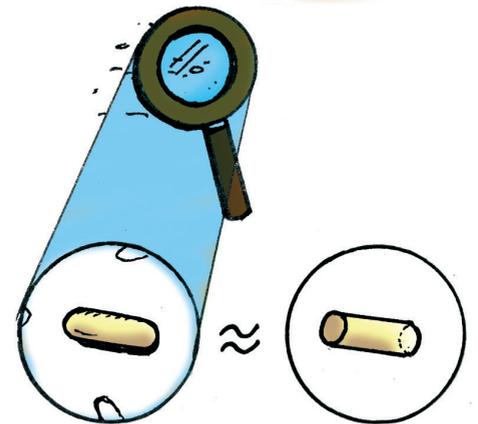
si je remplissais ma valise de riz, est-ce qu'il y aurait plus d'un milliard de grains ?

Alice se précipita à la cuisine. Elle prit la boîte de riz basmati que sa mère avait entamée ce midi.



Un grain de riz ressemble à un cylindre de 5 mm de long pour 1 mm de diamètre, déclara-t-elle.

Son volume est donc assez proche de $3,14 \times (0,5 \times 0,5) \times 5$ mm³, mais ce grain là me semble très petit...



Disons qu'un grain de riz moyen mesure certainement plus de 4 mm³, s'impatienta Matt.

Combien y a-t-il de mm^3 dans un litre ?



Facile : $1 \text{ dm} = 10 \text{ cm} = 100 \text{ mm}$.

$1 \text{ dm}^3 = 100 \times 100 \times 100 \text{ mm}^3$.

$100 \times 100 \times 100 = 1 \text{ 000 000}$.

Il y a donc 1 million de millimètres cubes dans un litre. Ça fait environ 250 000 grains de riz. Alors dans ma valise, il y aurait moins de $40 \times 250 \text{ 000}$ grains, soit 10 000 000.

Moins de 10 millions ! On est loin du milliard...



Ça me rappelle l'histoire de l'inventeur du jeu d'échecs, fit Matt, celle que tu m'as montrée sur notre bouquin de maths, au chapitre qui parle des "puissances" d'un nombre.



L'histoire est hyper-connue ! Si le lecteur veut la relire, avec deux autres variantes, Kangy lui a préparé des fiches « calcul »...

Et voilà Alice et Matt lancés dans une escalade de problèmes.

Le bon placement du chef indien

Calcul 2



L'histoire nous dit qu'un chef indien vendit l'île de Manhattan aux Hollandais en 1626, pour environ 24 dollars de mauvais whisky.

S'il avait placé cette somme à 4 %, elle aurait été multipliée chaque année par 1,04.

En 380 ans, elle aurait été

multipliée par $1,04 \times 1,04 \times 1,04 \times \dots \times 1,04$

(les ... veulent dire que 1,04 est écrit 380 fois).

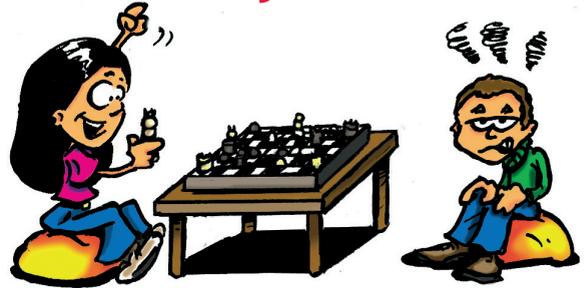
Ses descendants posséderaient donc, en 2006, une somme égale à $24 \times (1,04)^{380}$ dollars, comme l'écrivent les mathématiciens.

Avec une calculatrice calculant les "puissances", on peut vérifier que $(1,04)^{380}$ vaut environ

3 000 000 (3 millions).

Les 24 dollars auraient donc aujourd'hui rapporté (sans les crises boursières qui rendent ce calcul irréaliste) quelques 72 millions de dollars !

La légende du jeu d'échecs



Une légende arabe attribue l'invention du jeu d'échecs à un brahmane du nom de Sissa, précepteur d'un jeune roi des Indes. Il aurait imaginé ce jeu tout à la fois pour distraire son illustre élève et pour lui donner une leçon d'humilité : le Roi, pièce la plus importante, est impuissante sans l'aide de ses sujets.

Enchanté, le jeune roi demanda à Sissa de choisir sa récompense. Le brahmane répondit :

— Que l'on mette un grain de riz pour la première case, deux pour la deuxième, quatre pour la troisième, huit pour la quatrième et ainsi de suite en doublant jusqu'à la 64^e case, et que le tout additionné me soit remis.

Le roi ne put jamais satisfaire la demande de Sissa. En effet, on montre que le nombre total de grains est voisin de 2^{64} , c'est-à-dire le produit de 64 deux (voir page 30). Or le produit de 10 deux est voisin du produit de 3 dix.

$2 \times 2 = 1024$

$\approx 1000 = 10 \times 10 \times 10$.

Donc le produit de 6 fois 10 deux est voisin du produit de 6 fois 3 dix, c'est-à-dire de 18 dix*.

Or $64 = 4 + 6 \times 10$; le produit de 64 deux est donc voisin de $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 \text{ 000 000 000 000 000 000}$.

On a vu que $2 \times 2 \times 2 \times 1 \text{ 000 000}$

grains pouvaient être le contenu d'une valise.

Sur la dernière case de l'échiquier, il y aurait donc un peu plus de

2 000 000 000 000 valises,

soit deux mille milliards de valises de riz !

* En utilisant la notation "puissance", les mathématiciens écrivent, en abrégé, $2^{60} \approx 10^{18}$.

Calcul 3





Le grain de blé du jeune Harbert dans L'ÎLE MYSTÉRIEUSE de Jules Verne

Ce jour-là, — il pleuvait à torrents, — les colons étaient rassemblés dans la grande salle de Granite-house, quand le jeune garçon s'écria tout d'un coup :

« Tiens, monsieur Cyrus. Un grain de blé ! »

Et il montra à ses compagnons un grain, un unique grain qui, de sa poche trouée, s'était introduit dans la doublure de sa veste. [...]

« Eh ! mon garçon, s'écria Pencroff en souriant, nous voilà bien avancés, ma foi ! Qu'est-ce que nous pourrions bien faire d'un seul grain de blé ?

— Nous en ferons du pain, répondit Cyrus Smith.

— Du pain, des gâteaux, des tartes ! répliqua le marin. Allons ! Le pain que fournira ce grain de blé ne nous étouffera pas de sitôt ! »

Harbert, n'attachant que peu d'importance à sa découverte, se disposait à jeter le grain en question, mais Cyrus Smith le prit, l'examina, reconnut qu'il était en bon état, et, regardant le marin bien en face :

« Pencroff, lui demanda-t-il tranquillement, savez-vous combien un grain de blé peut produire d'épis ?

— Un, je suppose ! répondit le marin, surpris de la question.

— Dix, Pencroff. Et savez-vous combien un épi porte de grains ?

— Ma foi, non.

— Quatre-vingts en moyenne, dit Cyrus Smith. Donc, si nous plantons ce grain, à la première récolte, nous récolterons huit cents grains, lesquels en produiront à la seconde **six cent quarante mille**, à la troisième **cinq cent douze millions**, à la quatrième plus de **quatre cents milliards** de grains. Voilà la proportion. »

Les compagnons de Cyrus Smith l'écoutaient sans répondre. Ces chiffres les stupéfiaient. Ils étaient exacts cependant...

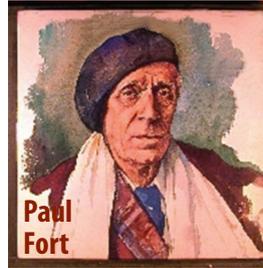
En effet :

$$800 \times 800 = 640\ 000 = 640\ \text{mille}$$

$$800 \times 800 \times 800 = 512\ 000\ 000$$

$$800 \times 800 \times 800 \times 800 = 4096\ 000\ 000\ 000,$$

soit 409 **600 000 000**, c'est bien un peu plus de 400 **milliards**.



La Ronde autour du monde

Si toutes les filles du monde voulaient s'donner la main, tout autour de la mer, elles pourraient faire une ronde.
Si tous les gars du monde voulaient bien être marins, ils feraient avec leurs barques un joli pont sur l'onde.
Alors on pourrait faire une ronde autour du monde, autour du monde, si tous les gars du monde voulaient s'donner la main.



Et si tous les gars du Monde voulaient bien se donner la main...

... est-ce qu'ils feraient le tour de la Terre ? La circonférence de la Terre est de 40 000 kilomètres.

Admettons que, sans trop écarter les bras, chacun compte pour 1 mètre.

Pour faire une chaîne de

40 **mille** kilomètres,

soit 40 **mille mille** mètres,

soit 40 **millions** de mètres,

il suffit donc de 40 millions de personnes.

La population de la France y suffirait. Alors, le Monde entier ...

**Question
Jeu** ★ **2**

Pouvons-nous vivre un milliard de secondes ?

Combien vivons-nous, en moyenne, de jours ? d'heures ? de minutes ?

DONNÉES : En France, aujourd'hui, l'espérance de vie est d'environ 80 ans (hommes et femmes confondus).



**Question
Jeu** ★ **3**

Une pièce de 1 euro mesure un peu plus de 1 mm d'épaisseur.

Si j'étais millionnaire en euros, ma pile de pièces dépasserait-elle la Tour Eiffel ?

Et si j'étais milliardaire, à quelle hauteur monterait ma pile de billets de 20 euros ?

DONNÉE : il faut une quinzaine de billets de 20 euros pour atteindre 1 mm d'épaisseur.



**Question
Jeu** ★ **4**

Si on (les hommes, femmes et enfants de la planète) se serrait tous les uns contre les autres, quelle place occuperait-on ?

La surface de l'Europe, de la France, de Paris ?

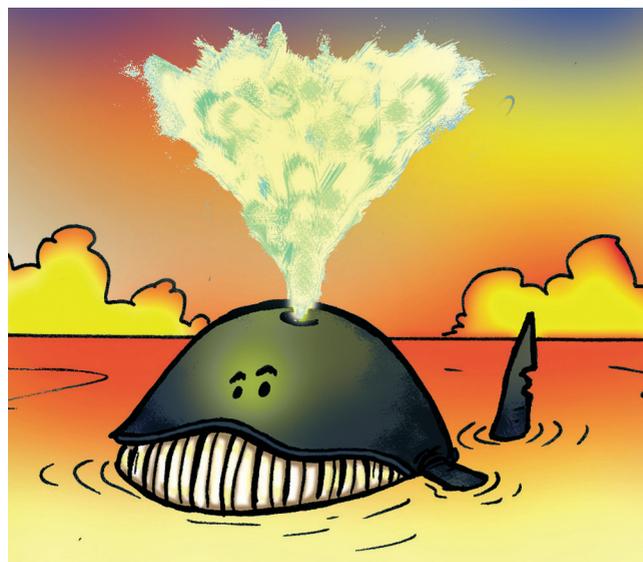
DONNÉES : Nous sommes un peu moins de dix milliards d'êtres humains sur cette terre. En se serrant bien, admettons que l'on pourrait tenir à dix sur un mètre carré...

**$1 \text{ km}^2 = 1000 \times 1000 \text{ m}^2$,
c'est-à-dire que 1 kilomètre carré égale 1 million de mètres carrés.**

**Question
Jeu** ★ **5**

Combien faudrait-il de baleines pour remplir tous les océans ?

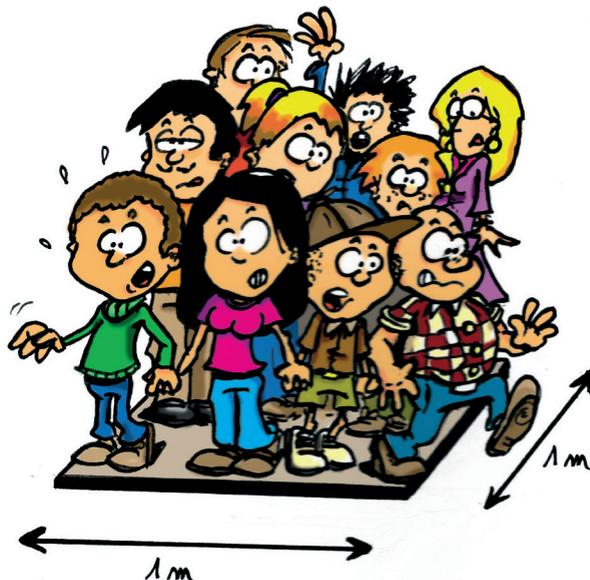
Un milliard ? mille milliards ? un million de milliards ? un milliard de milliards ?



DONNÉES : une baleine pèse en moyenne 25 tonnes ; les océans recouvrent environ 70 % de notre planète ; la Terre est une boule de 6400 km de rayon ; la surface d'une boule de rayon R vaut $4\pi R^2$; la profondeur moyenne des océans est de 4000 mètres.

La baleine est presque complètement constituée d'eau. Un mètre cube d'eau pèse une tonne.

**$1 \text{ km}^3 = 1000 \times 1000 \times 1000 \text{ m}^3$,
c'est-à-dire que 1 kilomètre cube égale 1 milliard de mètres cubes.**



SOLUTIONS

QJ 1.

$$\frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10}{10+9+8+7+6+5+4+3+2+1}$$

$$\frac{11+11+11+11+11+11+11+11+11+11}{11}$$

2 fois la somme des 10 premiers entiers vaut 11×10 ;

2 fois la somme des 200 premiers entiers vaut 201×200 .

10 étages : 55 acrobates ;

200 étages : 20 100 acrobates.

Jeu d'échecs. [Pour les 4e et 3e.]

Le nombre de grains est exactement

$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63}.$$

Mais la somme S est facile à calculer.

En effet, on a l'égalité :

$$1 + 2(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{62} + 2^{63}) \\ = (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{63}) + 2^{64},$$

c'est-à-dire $1 + 2S = S + 2^{64}$.

D'où $S = 2^{64} - 1$.

• QJ 2.

• L'espérance (la moyenne) de vie en France est aujourd'hui de 80 ans, soit 29 220 jours, 701 280 heures, 42 076 800 minutes, 2 524 608 000 secondes. Environ 2,5 milliards de secondes (1 milliard de secondes, c'est environ 32 ans !)

• QJ 3.

• 1 000 000 mm = 1 000 m.
1 million de millimètres font mille mètres, soit trois fois la Tour Eiffel. 15 billets de 20 euros, ou 300 euros, font 1 mm.
• 300 000 euros font donc 1 mètre. 3 mètres font un peu moins de 1 000 000 (1 million) ;
1 milliard, c'est 1000 millions. Comme milliardaire, je peux donc faire une pile d'environ 3000 mètres : **3 kilomètres.**

QJ 4. 10 milliards de personnes pourraient tenir sur 1 milliard de m^2 .

1 milliard = mille millions.

1 million de $m^2 = 1 km^2$.

1 000 $km^2 \approx 30 km \times 30 km$.

C'est environ dix fois plus grand que Paris.

× QJ 5.

Rayon de la Terre : $6,4 \times 1000 km$.

Surface de la Terre : environ $4 \times 3 \times 40 \times 1000 \times 1000 km^2$, soit 480 millions de km^2 .

Surface des océans : 300 millions de km^2 . Volume des océans : 4×300 millions de km^3 , soit 1,2 milliard de km^3 .

Une baleine fait $25 m^3$. Résultat : environ **50 millions de milliards de baleines.**