Brunswick  1872

Ce que sont réellement les nombres

Richard Dedekind (1831-1916)

Le 26 avril 1872, le professeur Richard Dedekind fit à Brunswick une fantastique conférence « dédiée à son père bien aimé ». Fantastique car, pour la première fois au monde, il y énonçait une propriété des *nombres* qui permettait de comprendre ce qu'ils *étaient*. Plus tard, il écrira un livre développant ses idées sous le titre *Ce que sont et à quoi servent les nombres* (en allemand : *Was sind und was sollen die Zählen*).
Les nombres dont on parle ne sont évidemment pas que les nombres entiers : ce sont tous les nombres auxquels on peut penser, ceux qui servent pour compter, mesurer, repérer, estimer : 2 ou 365 mais aussi 1,62 ou – 9 ou aussi 1/3 ou encore π.

Une idée simple

L'idée de Richard Dedekind paraît très simple. « Mais, disait-il lui même, j'ai ainsi énoncé une caractéristique des nombres, utilisable comme base de déductions effectives. »
Il rappelle d'abord une évidente propriété d'une droite et de ses points :
Si tous les points d'une droite sont répartis en deux classes, de façon que tout point de la première classe est à gauche de tout point de la deuxième classe, alors il existe un et un seul point qui réalise cette découpe des points de la droite en deux classes.
Cette propriété, il propose tout simplement de l'énoncer dans le domaine des nombres… en remplaçant le mot *point* par le mot nombre, et *droite* par l'ensemble de tous les nombres :
Si tous les nombres sont répartis en deux classes, de façon que tout nombre de la première classe est plus petit que tout nombre de la deuxième classe, alors il existe un et un seul nombre qui réalise cette découpe de l'ensemble des nombres en deux classes.
Cet énoncé a d'importantes conséquences, par exemple, celle-ci…
Décidons de répartir les nombres en deux classes :
• ceux dont le carré est supérieur à 2,
• ceux dont le carré est inférieur à 2.
Alors, il existe un nombre qui réalise cette découpe en deux classes ; c'est évidemment le nombre dont le carré ne peut valoir que 2 exactement. Les mathématiciens notent ce nombre $\sqrt{2}$ et ils savent montrer que ce nombre ne peut s'écrire ni comme un décimal, ni comme une fraction (voir page suivante) ; mais, d'après l'idée de Richard, c'est un nombre comme les autres.
Ce que nous dit Richard Dedekind se résume finalement à ceci : **les nombres ne sont pas autre chose que les points d'une droite**. Et il justifie ainsi ce que nous faisons lorsque nous graduons une droite géométrique, c'est-à-dire lorsque nous associons un nombre à chaque point d'une droite et que chaque nombre est ainsi associé à un point.

? 20 Un nombre irrationnel

Sais-tu ce que le druide Euclideledix appelait le « bibix » d'un nombre ?
Un nombre pair (non nul) peut être partagé exactement en deux entiers égaux. Partant d'un nombre, supposons qu'on veuille ainsi le partager exactement en deux, plusieurs fois de suite.
Le bibix d'un nombre entier est le nombre de fois qu'on peut le partager en deux moitiés entières.
Par exemple, quel est le bibix de 56 ? Le premier partage donne 28 et 28, le deuxième partage en deux donne 14 et 14, le troisième donne 7 et 7 ; et on ne peut plus partager 7 exactement en deux. Le bibix de 56 est donc 3.

1. Tu comprends bien que tout nombre a un bibix bien déterminé.
Combien vaut le bibix de 28 ? et de 32 ? et de 34 ?

2. Quels sont les nombres dont le bibix vaut 0 ?

3. Quels sont les nombres dont le bibix vaut au moins 1 ? et ceux dont le bibix vaut au moins 3 ?

Les propriétés du bibix des nombres sont assez intéressantes ; par exemple, **si on multiplie un nombre par 2, on augmente son bibix de 1** (en effet multiplier par 2, permet de faire un partage en 2 de plus). Donc :
si le bibix d'un nombre est pair, alors le bibix de son double est impair.

4. Si le bibix d'un nombre vaut *z*, alors le bibix de son carré vaut 2*z*.
Pour comprendre cette propriété, fais des essais : compare le bibix de 3 et celui de 3×3 (égal à 9) ; compare le bibix de 6 et celui de 36 ;
compare le bibix de 10 et celui de 100.
Conséquence : **le bibix d'un carré est toujours pair**.

5. Maintenant, suppose qu'un quotient d'entiers $\frac{a}{b}$ ait pour carré le nombre 2 : on a $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$,
c'est-à-dire que les entiers a et b sont tels que $a^2 = 2\,b^2$.
• Selon notre dernière conclusion, le bibix de a^2 est pair ; celui de b^2 aussi ; donc celui de $2\,b^2$ est impair (d'après la propriété énoncée en 3).
Or le bibix de a^2 et celui de $2\,b^2$ sont les mêmes puisqu'ils sont égaux !
Mais un nombre pair ne peut pas être égal à un nombre impair !
« Y a que'que chose qui cloche la-dedans, concluons immédiatement » :
Les nombres entiers *a* et *b* ne peuvent pas être les numérateurs et dénominateurs d'une fraction dont le carré égale 2 !
Euclide et ses contemporains connaissaient déjà cette propriété, que tu viens de démontrer :
« $\sqrt{2}$ **est un nombre irrationnel** »,
La diagonale d'un carré unité est mesurée par un nombre dont le carré est 2 : ce nombre ne peut pas être le quotient de deux entiers (*quotient* se disait alors *ratio* en latin : c'est pourquoi on appela ce nombre, un nombre *irrationnel*.

28→14→7, le bibix de 28 est 2. 32→16→8→4→2→1, le bibix de 32 est 5. 34→17, le bibix de 34 est 1. Les nombres dont le bibix vaut 0 sont les impairs. Les nombres dont le bibix vaut au moins 1 sont les pairs. Les nombres dont le bibix vaut au moins 3 sont les multiples de 8.