1• Choisis un nombre de 3 chiffres.
2• Écris côte à côte deux fois ce nombre de façon à obtenir un nombre de 6 chiffres.

Maintenant, tu vas faire des divisions difficiles…
3• Divise ce nombre par 7.
4• Divise ce quotient par 11.
5• Divise ce quotient par 13.
Attention ! Ne me dis pas le résultat !
Car je le connais déjà !

```
     4 2 1
 × 1 0 0 1
     4 2 1
 4 2 1 • • •
 4 2 1 4 2 1 | 7
   0 1 4     | 6 0 2 0 3 | 1 1
     0 2 1   |   5 2     | 5 4 7 3 | 1 3
         0   |     8 0   |   2 7   | 4 2 1
             |       3 3 |     1 3 |
             |         0 |       0 |
```

1• Choisis un nombre de 2 chiffres.
2• Écris côte à côte trois fois ce nombre de façon à obtenir un nombre de 6 chiffres.

Maintenant, tu vas faire des divisions difficiles…
3• Divise ce nombre par 3.
4• Divise ce quotient par 7.
5• Divise ce quotient par 13.
6• Divise ce quotient par 37.
Attention ! Ne me dis pas le résultat ! Car je le connais déjà !

```
         5 2
 × 1 0 1 0 1
         5 2
     5 2 • •
 5 2 • •
 5 2 5 2 5 2 | 3
 2 2         | 1 7 5 0 8 4 | 7
   1 5       |   3 5       | 2 5 0 1 2 | 1 3
     0 2 5   |     0 0 8   | 1 2 0     | 1 9 2 4 | 3 7
         1 2 |         1 4 |     3 1   |     7 4 | 5 2
           0 |           0 |       5 2 |       0 |
             |             |         0 |
```

Le calculateur prodige

Aujourd'hui, Matt arrive chez Alice incroyablement surexcité.

Alice, Alice ! Avec le « truc » que je viens d'apprendre, cette fois je suis sûr d'**épater tes parents** ! Ils vont me prendre pour un génie, un génie du calcul ! Je peux leur faire croire que je sais multiplier, de tête, deux nombres de deux chiffres, en annonçant le résultat presque immédiatement, et en tous cas **plus vite qu'en frappant les nombres sur une calculatrice** !

Toi qui connais bien, je le sais, tes tables de multiplication à 1 chiffre, tu prétends connaître, aussi, celles à 2 chiffres ?

En fait je ne pourrais pas annoncer le résultat de toutes les multiplications à deux chiffres, mais de certaines d'entre elles seulement. Cependant, sous réserve d'une petite mise en scène, j'ai appris un tour très spectaculaire et impressionnant. Je te le fais… Par exemple, choisis le premier facteur.

Je choisis 43, dit Alice curieuse de la suite.

Moi, je choisis 47… et j'annonce : « 43 fois 47 font 2021 » !!!

Fiche magie 3

Mesdames et messieurs, je sais multiplier mentalement deux nombres compris entre **10** et **99**. Vous pourrez choisir le **premier facteur** et je choisirai le **second**. Et je précise que, pour m'obliger à ne pas choisir une multiplication trop simple, je choisirai ce second facteur dans la même dizaine que vous (par exemple, si vous choisissez **73**, je pourrai choisir **76** ou **79**…). Chacun calculera alors le résultat : vous à la calculatrice et moi de tête. *Et vous verrez que j'annoncerai le résultat le premier !*

Ainsi continua le jeu, avec des multiplications qui paraissaient pourtant bien difficiles, mais dont Matt, tout joyeux, annonçait le résultat avec une étonnante rapidité :

$78 \times 72 = 5616$ $\quad$ $25 \times 25 = 625$

$99 \times 91 = 9009$ $\quad$ $17 \times 13 = 221$.

Kangy observait la scène avec amusement.

Tu devrais tout de même dévoiler ton truc à Alice.

Avec plaisir, fit Matt, mais après tu nous diras pourquoi ce truc marche…

Le truc à connaître :

Le truc consiste à bien choisir le second facteur : **Choisissez, dans la même dizaine, le nombre dont les unités sont le complément à 10 des unités du premier facteur.**

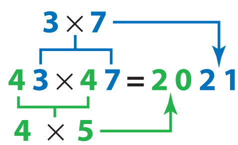
Ainsi les nombres 43 et 47 ont été choisis dans la dizaine entre **4**0 et **5**0.

La multiplication est alors hypersimple :

Calculez **4** × **5**, et retenez le résultat 20.

Multipliez les unités : 3 × 7 ; et retenez aussi le résultat 21.

Il suffit alors de coller les deux résultats retenus : 2021.



Pourquoi ça marche ?

Pourquoi ça marche ? dit Kangy, c'est très simple, il suffit d'écrire les calculs.

Soit d le chiffre des dizaines commun aux deux nombres et u et v leurs chiffres des unités.

On a $v = 10 - u$ et on doit effectuer le produit $(10d + u) \times (10d + v)$.

Cela fait

$$100dd + 10du + 10dv + uv$$
$$= 100dd + 10du + 10d(10 - u) + uv$$
$$= 100dd + 10du + 100d - 10du + uv$$
$$= 100dd + 100d + uv = 100d(d + 1) + uv.$$

Les deux premiers chiffres du résultat sont bien ceux du produit $d(d + 1)$, puisque la multiplication par 100 revient à placer ces deux chiffres au début (le premier chiffre peut être un zéro).

Et les deux derniers chiffres du résultat sont bien ceux du produit uv.

— Tu n'es peut-être pas un vrai génie, conclut Alice, mais ton truc, lui, est totalement génial.

— Puisque vous vous intéressez aux nombres, acheva Kangy, je vous donne deux petites informations qui ne sont pas connues de tous…

Vingt-deux ! V'là l'chef

Dans les ateliers d'imprimerie du XIX[e] siècle, les ouvriers typographes avertissaient leurs collègues de l'arrivée du chef en criant « Vingt-deux ». Il s'agissait d'un code numérique assez naturel pour ceux qui devaient prendre les lettres une à une dans des cases pour en faire des mots et des phrases : chaque lettre était codée par son rang dans l'alphabet.

C = 3   H = 8   E = 5   F = 6

CHEF = 3 + 8 + 5 + 6 = 22.

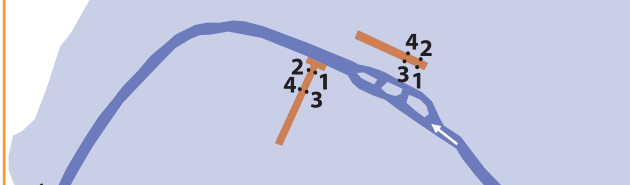
Ouvriers typographes, gravure d'Abraham Bosse (1602-1676)

Les nombres et les rues

Depuis le décret du préfet Frochot, le 4 février 1805, les maisons et immeubles de Paris sont ainsi numérotés :

— les numéros pairs sont à droite si on marche dans le sens croissant des nombres.

— les nombres 1 et 2 partent de la Seine, si la rue en est “presque” perpendiculaire, ou en suivant son cours, si la rue est “presque” parallèle au fleuve.



Évidemment, il y a parfois des ambiguïtés, mais c'est suffisamment commode pour que cela se passe de même dans la plupart de nos villes.

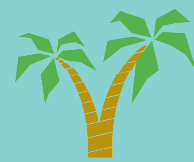
Fiche magie 4

1• Choisis un nombre de 3 chiffres distincts.
2• Renverse-le.
3• Soustrais le plus petit du plus grand.
4• Renverse-le.
5• Ajoute ces deux derniers nombres.

Incroyable : on trouve toujours le même résultat !

Recommence avec un autre nombre, tu verras…
… ça marche presque tout le temps.

Fiche magie 5



1• Choisis 3 chiffres distincts.
2• Calcule leur somme *s*.
3• En permutant ces 3 chiffres, forme les 6 nombres possibles inférieurs à 1000.
4• Calcule la somme S de ces six nombres
5• Quel est le quotient de S par *s* ?

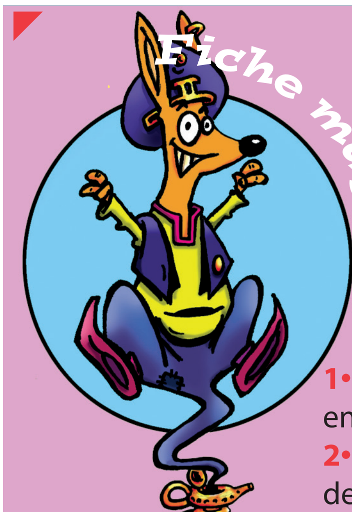
Incroyable : on trouve toujours le même résultat !
Recommence avec un autre nombre, tu verras…

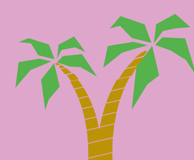
Fiche magie 6

1• Choisis mentalement un nombre de 1 chiffre.
2• Multiplie-le par 9.
3• Enlève ce que tu viens de trouver à 10 fois ton âge.
4• Maintenant, donne-moi ce résultat.

Je peux trouver facilement ton âge.
(Je sais que tu as au moins 10 ans.)
Pourquoi ?

Fiche magie 7



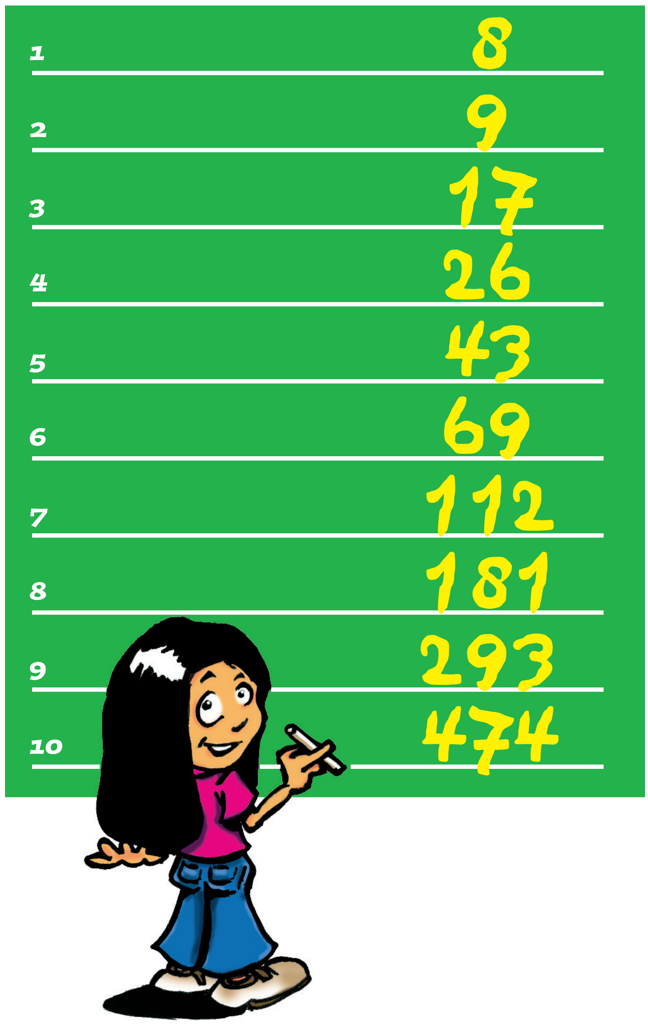


1• Choisis un nombre entre 100 et 999.
2• Appelle S la somme de ses 3 chiffres et *d* le chiffre des dizaines.
3• Renverse l'écriture du nombre initial.
4• Ajoute le nombre initial au nombre obtenu.
5• Retranche le double de S.
6• Divise le résultat par 9.
7• Retranche du quotient le double de S.
8• Divise le résultat par 9, ajoute *d* et enlève S.

Explique le résultat obtenu.

L’histoire de la mathémagicienne

Alice accueillit Matt devant le tableau sur lequel elle travaillait et où elle avait préparé 10 lignes. Elle lui tendit la craie…
— Écris, s’il te plaît, deux chiffres l’un au-dessous de l’autre. Tu pourrais écrire des nombres à plusieurs chiffres mais les calculs seraient un peu durs pour toi.
Matt s’exécuta. Il écrivit 8 et 9.
— Maintenant, écris dessous la somme de ces deux nombres. Puis dessous **la somme des deux derniers écrits**… et ainsi de suite **jusqu’à la dixième ligne**.
— 8 et 9, 17, puis 9 et 17, 26, et… jusqu’à 181 et 293, 474, voilà !
— Et maintenant, prends ta calculatrice si tu veux, et **additionne tous les nombres que tu as écrit**.
— Les dix nombres ! Ça va être long.
— Eh oui ! Enfin, **vérifie juste que ça fait 1232… parce que, moi, j’ai déjà fini le calcul !**
Complètement ébahi, Matt calcula la somme et trouva effectivement 1232 !
— Tu es une vraie mathémagicienne. Mais comment as-tu fait ?
— Demande à Kangy, ça n’est pas difficile et tu pourras faire facilement la même chose.
— Effectivement, confirma Kangy, il suffit de faire les calculs en partant de 2 nombres *a* et *b* quelconques [*Le détail est donné dans les solutions page* 31]. Et tu verras que **la somme des dix nombres vaut exactement 11 fois le septième**.
— Super ! Et la multiplication par 11, c’est facile à faire de tête.



— Oui, et si tu veux faire un tour plus simple, tu peux t’arrêter à la sixième ligne ; la somme des nombres écrits jusque-là vaut alors 4 fois le nombre écrit à la cinquième ligne (sur le tableau, $172 = 4 \times 43 = 8 + 9 + 17 + 26 + 43 + 69$).

Et puisque les jeux de nombres vous amusent, je vous ai préparé 4 fiches-magie (ci-contre) et 8 questions-jeux (pages suivantes).

Question Jeu 8

C'est l'anniversaire de Matt.
— Tu ne connais pas mes deux frères et ma sœur dit Alice, mais le produit de leurs trois âges vaut 36 et leur somme est égale à notre âge, maintenant commun à tous les deux.
Matt réfléchit et dit alors :
— Je ne peux pas dire leurs âges.
Ami lecteur, peux-tu en déduire l'âge de Matt et d'Alice ?
— Sache qu'ils sont tous plus jeunes que Kangy, ajouta Alice.
— Alors je connais tous les âges, annonça Matt.
Ami lecteur, **peux-tu dire leurs trois âges ?**
Que peux-tu affirmer sur l'âge de Kangy ?
Que peux-tu dire des frères d'Alice ?

Question Jeu 9

Dans une brocante, Alice, Matt et Kangy ont trouvé un « tandem », qu'ils ont acheté pour 150 euros en donnant 50 euros chacun. Ainsi, ils pourront aller se promener tous les trois ensemble.

Retrouvant Hélène, la mère d'Alice, ils sont fiers de leur montrer leur acquisition. Vu l'état du tandem, Hélène trouve que c'est un peu cher et décide d'aller renégocier le prix auprès des vendeurs. Ceux-ci lui redonnent 50 euros.

Hélène trouve alors un lot de 3 casques pour 20 euros et leur redonne donc 30 euros à se partager.

Alice, Matt et Kangy ont finalement donné 40 euros (50 – 10) chacun, donc 120 euros au total pour le tandem.
Avec les 20 euros donnés pour les casques, cela fait 140 euros.

Où sont donc passés les 10 euros de différence avec les 150 euros initialement donnés ?

Question Jeu 10

Avec huit « 8 » et des additions, comment peut-on faire 1000 ?

8 ? 8 ? 8 ? 8 ? 8 ? 8 ? 8 ? 8 = 1000.
À la place de chaque « ? », on peut mettre un signe « + » ou ne rien mettre.
Par exemple : 88 + 88 + 88 + 8 + 8 = 280.
Comment rendre juste la première égalité ?

Question Jeu 11 Et avec sept « 4 » et des signes « + », **peut-on faire 100 ?**

4 ? 4 ? 4 ? 4 ? 4 ? 4 ? 4 = 100.

Question Jeu 12 **Qu'est-ce que le résultat de cette soustraction a de particulier ?**

987 654 321 – 123 456 789.

Question Jeu 13 **Trouver une addition et une soustraction de nombres de trois chiffres utilisant les neuf chiffres non nuls une et une fois chacun** (comme sur l'exemple !).

1 2 9	■■■	■■■
+ 4 3 8	+ ■■■	– ■■■
5 6 7	■■■	■■■

Question Jeu 14 Ernest Dudeney était un fameux "problémiste" du début du xx^{e} siècle. Parmi les milliers de problèmes qu'il a proposé à la sagacité de ses contemporains, en voici un très simple à énoncer et plutôt excitant à chercher :

1 ? 2 ? 3 ? 4 ? 5 ? 6 ? 7 ? 8 ? 9 = 100.

Placer les signes « + » ou « – » ou rien à la place des « ? » pour que l'opération soit juste.
Par exemple :

123 + 45 – 67 + 8 – 9 = 100.

Trouver d'autres solutions. Il y en a 10 au total !

Et pour cet autre problème, trouver au moins 3 solutions sur les 14 qui existent :

9 ? 8 ? 7 ? 6 ? 5 ? 4 ? 3 ? 2 ? 1 = 100 ?

Question Jeu 15 **Compléter le carré (magique) de façon que les sommes de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale égalent toutes 45.**

		7
	1	

SOLUTIONS

La mathémagicienne
Les sommes valent successivement :
a, b, $a+b$, $a+2b$, $2a+3b$, $3a+5b$, $5a+8b$, $8a+13b$, $13a+21b$, $21a+34b$.
Notez que $1+2+3+5+8+13+21=54$.
La somme totale vaut alors
$(a+54a)+(54b+34b)$, soit $55a+88b$
qui est bien 11 fois le 7^e^ nombre $(5a+8b)$.

QJ 8. Parmi les décompositions de 36 en trois facteurs :
$36 = 1 \times 1 \times 36 = 1 \times 6 \times 6 = 1 \times 3 \times 12$
$36 = 1 \times 2 \times 18 = 1 \times 4 \times 9 = 2 \times 2 \times 9$
$36 = 4 \times 3 \times 3 = 2 \times 6 \times 3$,
deux seulement ont une même somme de facteurs : $1 + 6 + 6 = 2 + 2 + 9 = 13$.
Matt et Alice ont donc13 ans. Kangy a 7 ou 8 ans (puisque Matt peut connaître les âges en sachant qu'ils sont plus jeunes que Kangy) et les âges sont 1, 6 et 6 ans. Les frères d'Alice sont jumeaux.

QJ 9. L'erreur est qu'ils n'ont pas payé 120 euros pour le tandem. En fait, ils ont payé 120 euros (150 – 30) au total ; et ils ont bien reçu 120 euros de matériel (100 pour le tandem et 20 pour les casques).

QJ 10. $8 + 8 + 8 + 88 + 888 = 1000$.

QJ 11. $4 + 4 + 4 + 44 + 44 = 100$.

QJ 12. 864 197 532, comme dans chaque terme de l'opération, les 9 chiffres non nuls sont là.

QJ 13.
(Remarque: si on a trouvé une addi-tion, on a aussi trouvé une soustraction!)

318	**972**	**567**
+ 654	**- 654**	**- 438**
------	------	-------
972	**318**	**129**

QJ 14.
$123 + 45 - 67 + 8 - 9 = 100$
$123 - 45 - 67 + 89 = 100$
$123 + 4 - 5 + 67 - 89 = 100$
$123 - 4 - 5 - 6 - 7 + 8 - 9 = 100$
$12 + 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + 89 = 100$
$1 + 23 - 4 + 5 + 6 + 78 - 9 = 100$
$1 + 2 + 34 - 5 + 67 - 8 + 9 = 100$
$12 + 3 - 4 + 5 + 67 + 8 + 9 = 100$
$1 + 23 - 4 + 56 + 7 + 8 + 9 = 100$
$1 + 2 + 3 - 4 + 5 + 6 + 78 + 9 = 100$

$98 - 76 + 54 + 3 + 21 = 100$
$9 - 8 + 76 + 54 - 32 + 1 = 100$
$98 - 7 - 6 - 5 - 4 + 3 + 21 = 100$
$9 - 8 + 76 - 5 + 4 + 3 + 21 = 100$
$98 - 7 + 6 + 5 + 4 - 3 - 2 - 1 = 100$
$98 + 7 - 6 + 5 - 4 + 3 - 2 - 1 = 100$
$98 + 7 + 6 - 5 - 4 - 3 + 2 - 1 = 100$
$98 + 7 - 6 + 5 - 4 - 3 + 2 + 1 = 100$
$98 - 7 + 6 + 5 - 4 + 3 - 2 + 1 = 100$
$98 - 7 + 6 - 5 + 4 + 3 + 2 - 1 = 100$
$98 + 7 - 6 - 5 + 4 + 3 - 2 + 1 = 100$
$98 - 7 - 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 100$
$9 + 8 + 76 + 5 - 4 + 3 + 2 + 1 = 100.$
$9 + 8 + 76 + 5 + 4 - 3 + 2 - 1 = 100.$

QJ 15.

9	29	7
13	15	17
23	1	21

Fiche-magie 4. Le nombre qui s'écrit abc vaut $100a + 10b + c$. Le nombre qui s'écrit cba vaut $100c + 10b + a$.
Supposons $a \geqslant c$ et soustrayons le plus petit du plus grand.
$D = (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a)$.
$D = 100(a - c) - (a - c)$.
$a \neq c$ puisqu'on a demandé des chiffres dis-tincts. On peut écrire D en faisant apparaître les centaines, les dizaines et les unités : D
$= 100(a - c) + 10 - a + c - (100 - 90)$ D
$= 100(a - c - 1) + (90) + (10 - a + c)$. Si
$a \neq c + 1$, le nombre renversé vaut
$100(10 - a + c) + (90) + (a - c - 1)$,
lequel ajouté à D amène le résultat :
$100 \times (9) + 180 + 9$, soit 1089.
Le résultat est donc 1089 sauf lorsque le chiffre des centaines vaut 1 de plus que le chiffre des unités, ce qui n'arrive qu'une fois sur dix (et le résultat est alors 198) !

Fiche-magie 5.
$$abc + bca + cab + acb + cba + bac = 200(a + b + c) + 20(a + b + c) + 2(a + b + c),$$
soit $222 \times s$. Le quotient est toujours 222 !

Fiche-magie 6. Âge à deviner : A.
Nombre choisi : n.
On a fait effectuer $10A - 9n = R$.
Lorsque $A = 10d + u$ (et $d > 0$), on a
$R = 100d + 10u - 9n$.
$R = 100d + 10(u - n) + n$.
Séparons le chiffre des unités du résultat, on obtient l'écriture de deux nombres :
$$10d + (u - n) \text{ et } n.$$
En ajoutant ces deux nombres on a l'âge cherché ! Par exemple, si $R = 87$, l'âge est $8 + 7$, soit 15 (et le nombre choisi, 7).

Fiche-magie 7. On obtient successive-ment, à partir du nombre cdu :
4• $(100c + 10d + u) + (100u + 10d + c)$,
$101(c + u) + 20d$,
5• $99(c + u) + 18d$,
6• $11(c + u) + 2d$,
7• $9(c + u)$,
8• $c + u$, $c + d + u$, 0.
Le résultat est toujours 0.