L'infini

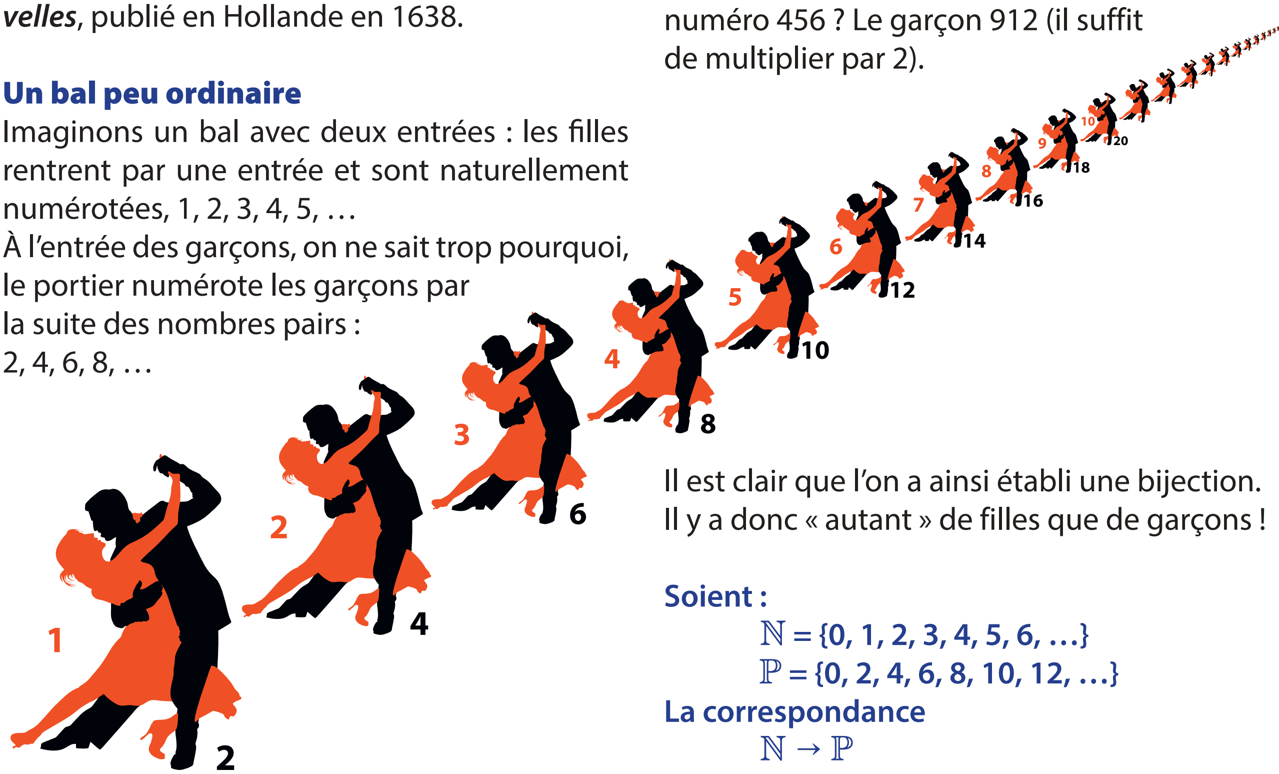
Le premier qui semble avoir compris comment ne pas se laisser déstabiliser par l'idée de l'infini est certainement **Galilée**.

Ainsi le dialogue de la BD ci-contre est inspiré de son ***Discours concernant deux sciences nouvelles***, publié en Hollande en 1638.

Un bal peu ordinaire

Imaginons un bal avec deux entrées : les filles rentrent par une entrée et sont naturellement numérotées, 1, 2, 3, 4, 5, …

À l'entrée des garçons, on ne sait trop pourquoi, le portier numérote les garçons par la suite des nombres pairs : 2, 4, 6, 8, …



Dimanche dernier chacun a pu danser sans problème ; il y avait 100 filles numérotées de 1 à 100 et 100 garçons numérotés de 2 à 200 !

Mais aujourd'hui, dans notre village mathématique, il y a une infinité de filles (numérotées par les entiers) et une infinité de garçons (numérotés par les entiers pairs).

La première idée est de faire danser 2 avec 2, 4 avec 4, 6 avec 6, et ainsi de suite. Tous les garçons vont danser mais il restera une infinité de filles sans cavalier, à savoir 1, 3, 5, 7, …

Il semble y avoir deux fois plus de filles que de garçons, mais cela n'est pas aussi simple.

En effet, aussi curieux que cela puisse paraître, il existe aussi une bijection entre l'ensemble des nombres pairs et l'ensemble des entiers naturels !

En effet, faisons danser le garçon 2 avec la fille 1, le garçon 4 avec la fille 2, le garçon 6 avec la fille 3 et ainsi de suite.

Avec qui danse le garçon portant le numéro 226 ? Avec la fille 113 (il suffit de diviser par 2, bien sûr).

Quel garçon danse avec la fille portant le numéro 456 ? Le garçon 912 (il suffit de multiplier par 2).

Il est clair que l'on a ainsi établi une bijection.
Il y a donc « autant » de filles que de garçons !

Soient :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$
$$\mathbb{P} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$$

La correspondance

$$\mathbb{N} \to \mathbb{P}$$
$$n \mapsto 2n$$

est une bijection entre $\mathbb{N}$, ensemble des nombres naturels et $\mathbb{P}$, ensemble de ses nombres pairs.

Voilà ce qu'il fallait oser penser : il y a des ensembles qui peuvent être mis en bijection avec une de leur partie ! Et ce sont de tels ensembles que les mathématiciens ont justement décidé de qualifier d'**infinis** !


Mon ami, vous savez distinguer les nombres "carrés" des autres ?
Bien-sûr ! Un "carré" naît de la multiplication d'un entier, appelé "racine", par lui-même.
25 = 5x5
49 = 7x7 ...
Tous les entiers ne sont pas des "carrés", n'est-ce pas ?
C'est évident ! 10 par exemple n'est pas un "carré" d'entier.
A priori, les "carrés" sont donc moins nombreux que les "carrés" et "non carrés" ensemble ?
Cela va de soi !
Les "carrés" sont aussi nombreux que leurs "racines", est-ce exact ?
Certainement ! Tout "carré" a une seule "racine", toute "racine" a un seul "carré".
Or tous les entiers sont des "racines" puisqu'on peut les élever au carré...
C'est un fait...
Mais alors ?!? Les "carrés" seraient donc aussi nombreux que tous les entiers, "carrés" ou non ?!?
Galilée ?..