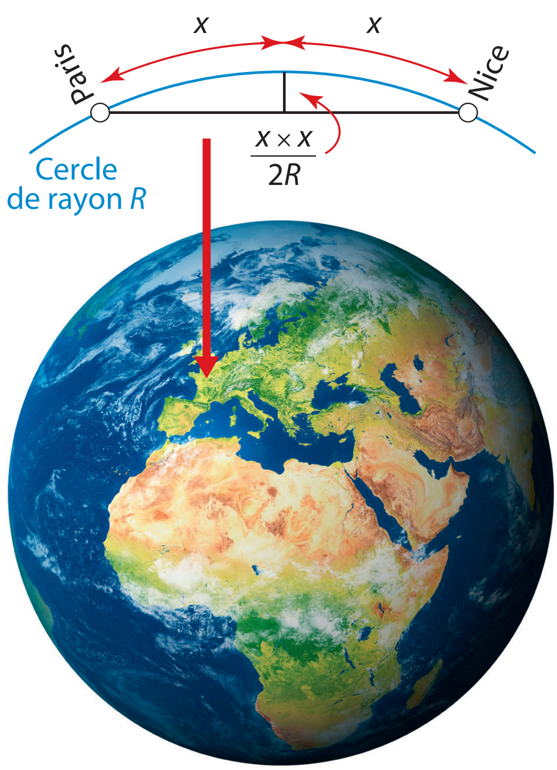
Le tunnel de Lewis Carroll

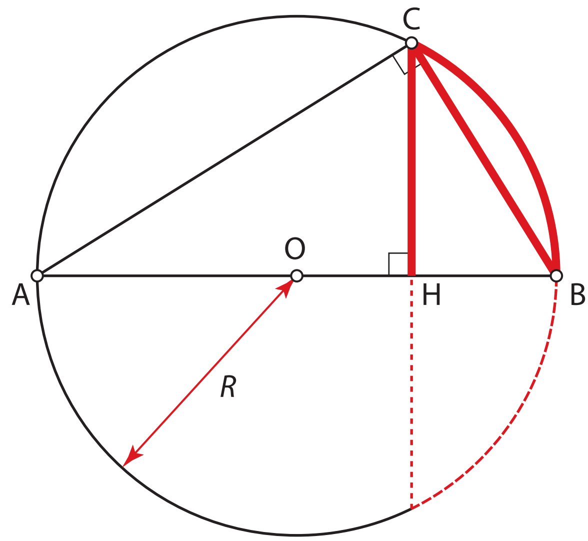
En 1867, le révérend **Charles Dodgson** fit paraître un ***Traité élémentaire des déterminants***, permettant en particulier de résoudre les systèmes d'équations linéaires.
Ce révérend, plus connu sous le nom de **Lewis Carroll** (1832-1898), est le créateur d'***Alice aux pays des merveilles***.
La bande dessinée ci-contre expose une curiosité évoquée dans ses ***Pillow Problems*** (Problèmes à résoudre sur l'oreiller !).
Pour répondre à la question posée, il faut connaître le résultat suivant (dont la démonstration, simple, est donnée ci-contre à droite) :
Sur un cercle de rayon *R*, un petit arc de longueur 2*x* s'éloigne de sa corde d'une distance maximum égale environ à $\frac{x^2}{2R}$!



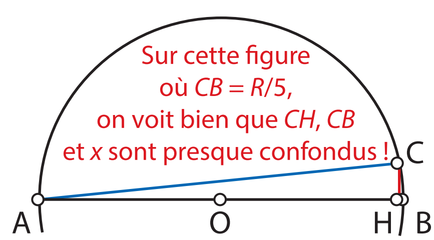
La Terre étant ronde, on est bien dans cette situation, avec $R = 6400$ km et
Paris-Nice = 686 km (à vol d'oiseau).
À peu près en son milieu, à la verticale de la ville de Mâcon, le tunnel est donc à une profondeur égale à $\frac{343 \times 343}{12\,800}$, soit 9,2 km ; plus de deux fois la hauteur du Mont-Blanc !

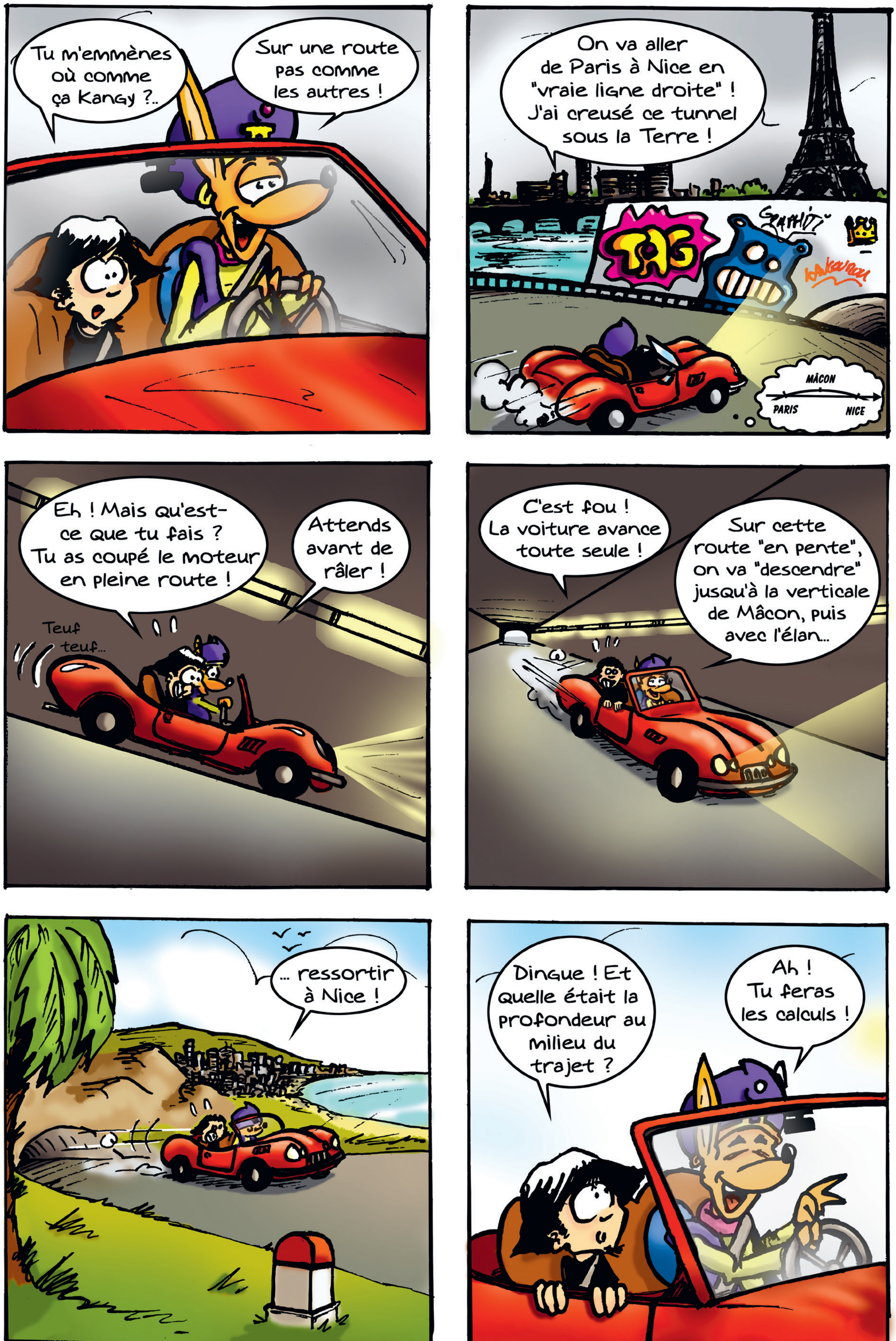
Démonstration :
Dans un triangle rectangle *ABC*, d'hypoténuse [*AB*] et de hauteur [*CH*], on a la relation :

$$CH^2 = AH \,.\, HB.$$



On dit parfois que *la hauteur est moyenne géométrique entre les segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse*.
(En effet, les triangles *CHB* et *AHC*, ayant mêmes angles, ont des côtés proportionnels : $\frac{CH}{AH} = \frac{HB}{CH}$; d'où la relation.)
Que devient cette relation lorsque la longueur *CB* est petite devant le rayon ?
C'est le cas ici où la distance Paris-Nice est 10 fois plus petite que le rayon de la Terre.
• La longueur *AH* est proche de la longueur *AB*, soit d'environ 2*R*.
• La longueur de l'arc *CB* (égal à *x* dans notre situation) est proche de la longueur du segment *CB*, et aussi de celle du segment *CH*.
Finalement, la relation $CH^2 = AH \,.\, HB$ s'écrit ici, au moins de manière approchée : $x^2 = 2R \,.\, HB$.
D'où $HB = \frac{x^2}{2R}$.




Tu m'emmènes où comme ça Kangy ?..
Sur une route pas comme les autres !
On va aller de Paris à Nice en "vraie ligne droite" ! J'ai creusé ce tunnel sous la Terre !
TAG
MÂCON
PARIS
NICE
Eh ! Mais qu'est-ce que tu fais ? Tu as coupé le moteur en pleine route !
Attends avant de râler !
Teuf teuf...
C'est fou ! La voiture avance toute seule !
Sur cette route "en pente", on va "descendre" jusqu'à la verticale de Mâcon, puis avec l'élan...
... ressortir à Nice !
Dingue ! Et quelle était la profondeur au milieu du trajet ?
Ah ! Tu feras les calculs !