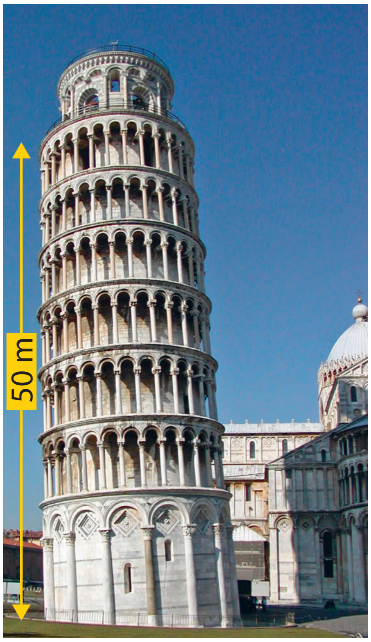
Les volumes-surprises

Dix ans avant son célèbre procès, le 20 octobre 1623, **Galilée** (1564-1642) fait paraître un ouvrage dans lequel il « essaye » de comprendre la nature des comètes ; son titre est en effet « ***L'Essayeur*** » (*Il Saggiatore*).

Voici une traduction du passage de ce livre qui fut, depuis cette date, très souvent cité et commenté :
La philosophie naturelle est écrite dans ce grand livre, toujours ouvert devant nos yeux, je veux dire l'Univers ; mais on ne peut l'assimiler que si l'on en connaît la langue et les caractères avec lesquels il est écrit. Il est écrit dans la langue mathématique et ses caractères sont des triangles, des cercles et autres figures géométriques, sans lesquels l'homme ne peut en saisir un seul mot.

Galilée pensait ainsi que « les mathématiques sont le langage de l'univers ». Et, toute sa vie, il s'est battu contre les intuitions spontanées du commun des mortels et s'en est tenu à l'expérience (reproductible et incontestable) pour établir des faits scientifiques.
En voici trois exemples.
1• La Terre n'est pas immobile ; c'est elle qui tourne autour du Soleil, contrairement à ce qu'on pourrait penser à partir d'une vision élémentaire…



2• Deux poids différents tombent à la même vitesse, contrairement à l'intuition immédiate, dès lors que la résistance de l'air n'intervient pas dans cette descente (comme elle intervient par exemple avec des plumes ou des feuilles).

La tour de Pise, construite au XII[e] siècle, mesure 56 mètres de haut. Du balcon à 50 mètres du sol, Galilée a ainsi fait tomber deux poids, l'un de 1 kilo et l'autre de 2 kilos : ils touchèrent le sol exactement ensemble.

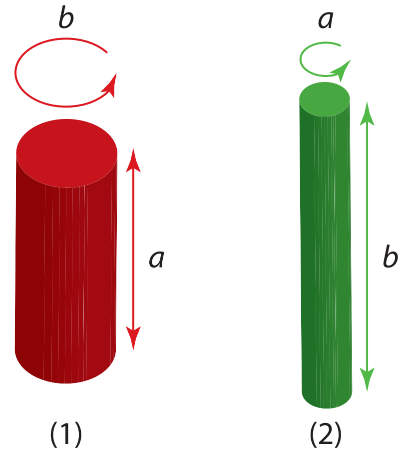
Calcul : la distance d parcourue (en mètres) en un temps t (en secondes) par un objet lourd qui tombe à la surface de la Terre vaut environ $d = 5t^2$. Ici on a donc $50 = 5t^2$, soit $t^2 = 10$, le temps de chute d'un objet du balcon de la tour de Pise est d'un peu plus de 3 secondes.

3• On peut rouler un rectangle, de côtés a et b, en un cylindre, de deux manières : de façon que l'arête latérale soit la largeur (a), ou de façon que cette arête latérale soit la longueur (b) ; les deux volumes formés n'ont pas la même valeur !

En effet, dans un cas (1) le volume est :

$$\pi\left(\frac{b}{2\pi}\right)^2 a = \frac{ab}{4\pi}\cdot b.$$

Et dans l'autre (2) : $\pi\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 b = \frac{ab}{4\pi}\cdot a.$



Si b est plus grand que a, le cylindre (1) a un volume plus grand.
Le volume le plus grand est obtenu en prenant la largeur du rectangle pour hauteur du cylindre !
C'est ce qu'illustre la BD ci-contre.
Voyez, page 31, les calculs avec une feuille A4.


Faisons un peu de magie avec une simple feuille rectangulaire !
Je la roule autour de son côté le plus court et je forme un cylindre.
Je le remplis à ras bord de bonbons...
J'ouvre mon cylindre, je mets les bonbons de côté et je roule ma feuille dans l'autre sens.
Je remets alors mes bonbons dans le cylindre, mais...
... arrivé à ras bord, il m'en reste encore beaucoup !.
Etonnant, non ?

SOLUTIONS

Les volumes-surprises

Avec une feuille au format A4, de 21 cm × 30 cm,

le cylindre le moins haut a un volume de $21 \times \dfrac{30 \times 30}{4\pi}$,

soit environ 1500 cm^3 (à peu près un litre et demi) ;

et le cylindre le plus haut a un volume de $30 \times \dfrac{21 \times 21}{4\pi}$,

soit environ 1050 cm^3 (un peu plus d'un litre).

Le format exact d'une feuille A4 est plutôt 21 cm de largeur et 29,7 cm de longueur et le rapport $\dfrac{\text{largeur}}{\text{longueur}}$ est exactement $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Le rapport des volumes est donc aussi $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, soit environ 0,707.

Dans la BD, si la feuille utilisée est une feuille A4, alors le nombre de bonbons qui restent sur la table après avoir rempli à ras bord le deuxième cylindre représente donc environ 30 % du nombre de bonbons mis de côté après avoir rempli le premier cylindre.