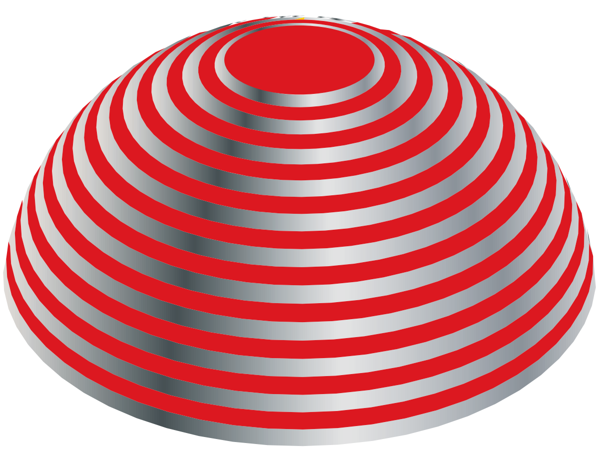
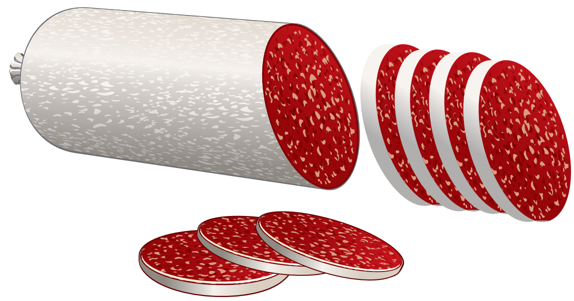
Du scanner au millefeuille

Le mot anglais **scan** à la même origine latine que le mot **scander** en français. « Scander » des vers, c'est en découper les syllabes ou groupes de syllabes pour mieux en faire apparaître la structure.
Ainsi, par exemple :
Et vois-tu/ chaque jour/ je t'aime/ davantage/
Aujourd'hui/ plus qu'hier/ et bien moins/ que demain !/
En anglais le verbe **to scan** a pris le sens plus général de balayer pour observer ; et il nous est revenu sous la forme substantivée avec **scanner**.
Un scanner c'est donc l'appareil qui analyse une image point par point pour la transmettre à un ordinateur qui peut ainsi la reconstituer.
En médecine, on désigne ainsi l'appareil qui radiographie des « tranches » de corps humain et en transmet les données à un ordinateur qui les transforme en images tridimensionnelles.

Sur le même principe voici ce que l'on pourrait appeler le « scan » d'une demi-sphère.

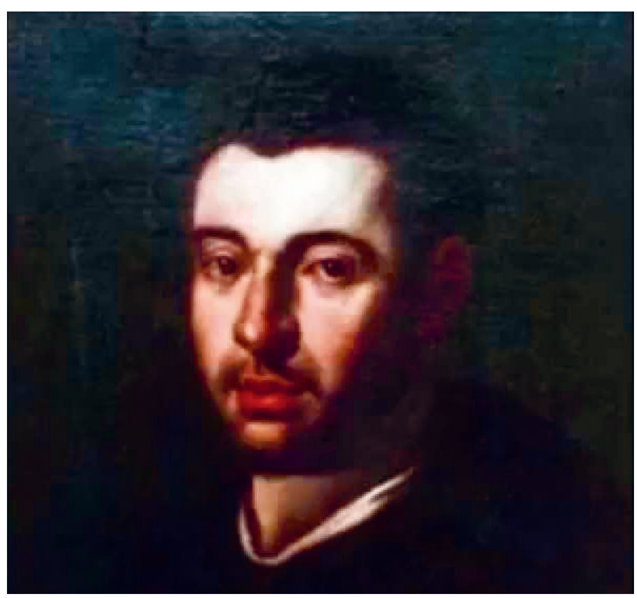


Et voici le début du scan d'une sorte de cylindre :



En découpant de même un volume mathématique par une suite de plans parallèles, on peut obtenir des résultats intéressants.
Dans son ***Discours concernant deux sciences nouvelles*** (1638), **Galilée** montre comment calculer le volume d'une demi-sphère de manière très astucieuse.
Sa méthode de « découpage en tranches » fut popularisée par son élève, **Cavalieri**, sous le nom de « géométrie des indivisibles ».
Elle est fondée sur la remarque suivante ,

On coupe deux volumes par des plans toujours horizontaux.
Si les sections planes des deux volumes ont la même aire pour chaque plan horizontal, alors les volumes eux-mêmes sont égaux.

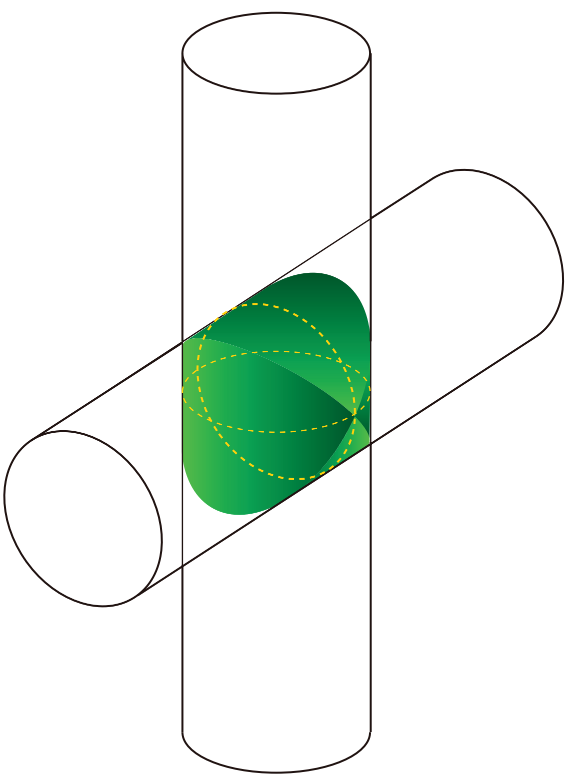


Bonaventura Cavalieri (1598-1647)

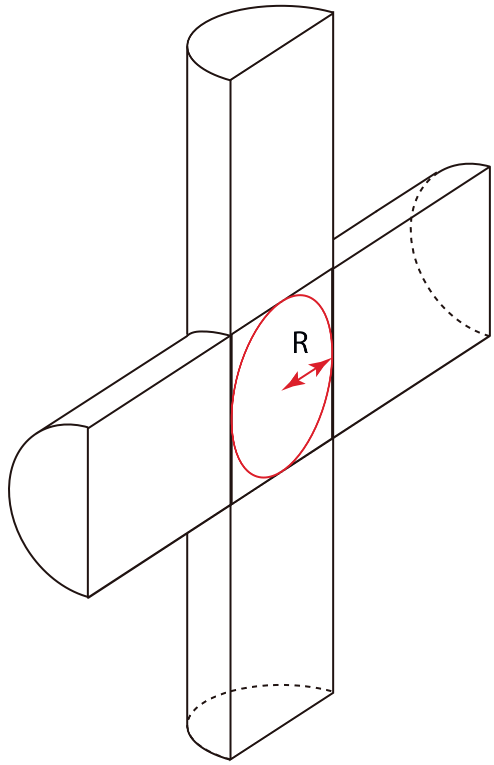
Décrivrons la situation en termes de pâtisserie. Un millefeuille est un vrai gâteau dans lequel il y a quelque chose à manger : c'est un volume. Et pourtant il est constitué de feuillets tellement minces que n'importe quel pâtissier vous dira (si le millefeuille est bien fait) qu'il ne peut en faire de plus fin : les feuillets du millefeuille sont "indivisibles". Ainsi en empilant beaucoup de surfaces (les feuillets), on peut obtenir un volume.
Si un millefeuille B a des feuillets trois fois plus petits que le millefeuille A, alors ce millefeuille B est trois fois plus petit que le millefeuille A.
Grâce à cette remarque, on peut réussir à calculer des volumes moins gourmands et apparemment compliqués. Dans l'exemple ci-dessous, les feuillets à comparer ont ainsi la forme de carrés et de cercles…

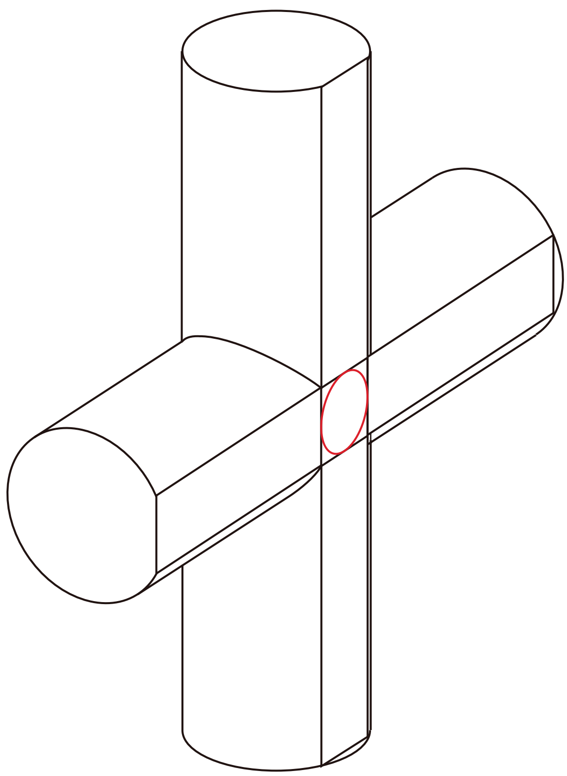
Le volume du carréoïde bicylindrique

Deux cylindres de même rayon et d'axes perpendiculaires dans un même plan, se coupent en angle droit. ***Quel est le volume V commun aux deux cylindres ?***



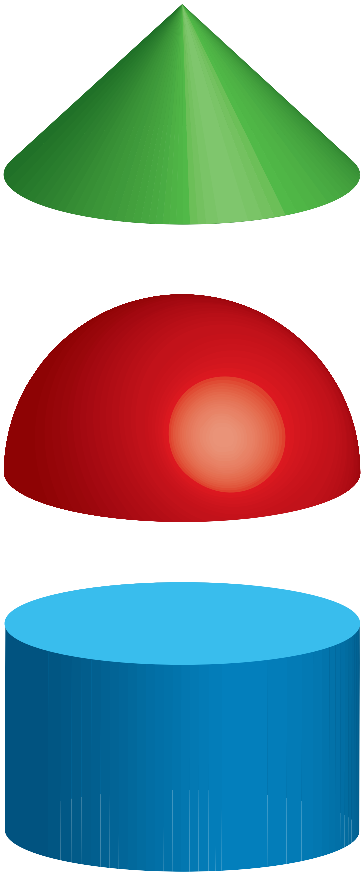
Ce volume V est coupé par des plans verticaux, selon des carrés. Et il y a inscrit, dans chacun de ces carrés, un cercle.

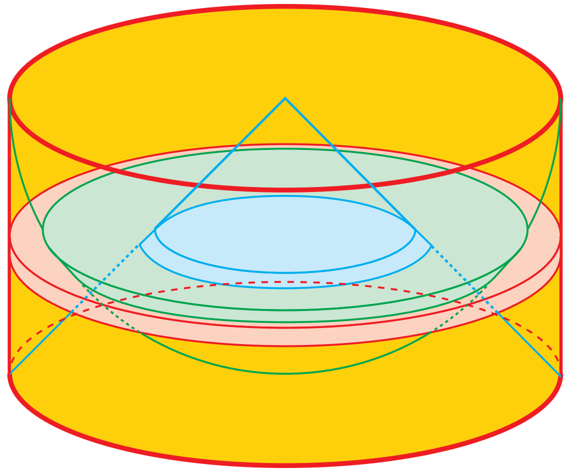




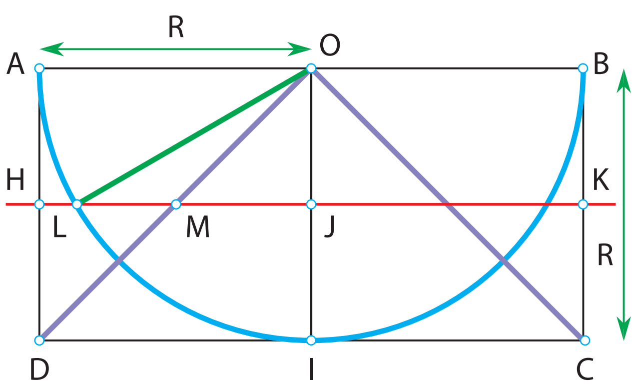
Pour chaque "tranche verticale", le carré a pour aire $4R^2$ et le disque πR^2. Leur rapport $4/\pi$ est donc aussi celui du volume cherché à celui de la sphère. Le volume de la sphère étant $(4/3)\pi R^3$, on a donc $V = (16/3)R^3$.

Le problème des trois corps ronds





Considérons les trois volumes engendrés par la figure suivante tournant autour de OI, un cylindre (ABCD), une demi-sphère (AIB) et un cône (ODC).



La figure suivante les représente coupés par un plan horizontal contenant la droite (HK).

Pour chercher le volume de l'*écuelle* extérieure à la demi-sphère et intérieure au cylindre, montrons d'abord que l'aire de la couronne rouge (découpée sur l'écuelle) est égale à l'aire du disque bleu (découpé sur le cône).

Ces aires sont respectivement $\pi(HJ^2 - LJ^2)$ et πJM^2, soit au facteur π près : $HJ^2 - LJ^2$ et JM^2.
Mais, $HJ = OL = R$
et $JM = OJ$ puisque $\widehat{MOJ} = 45°$.
Donc : $HJ^2 - LJ^2 = OL^2 - LJ^2$ et $JM^2 = OJ^2$.
Or ces deux nombres sont égaux d'après le théorème de Pythagore dans le triangle OJL.
Donc, d'après le principe des millefeuilles, le volume de l'écuelle vaut celui du cône, c'est-à-dire le tiers du cylindre.
Celui de la demi-sphère vaut donc les deux tiers du cylindre, soit

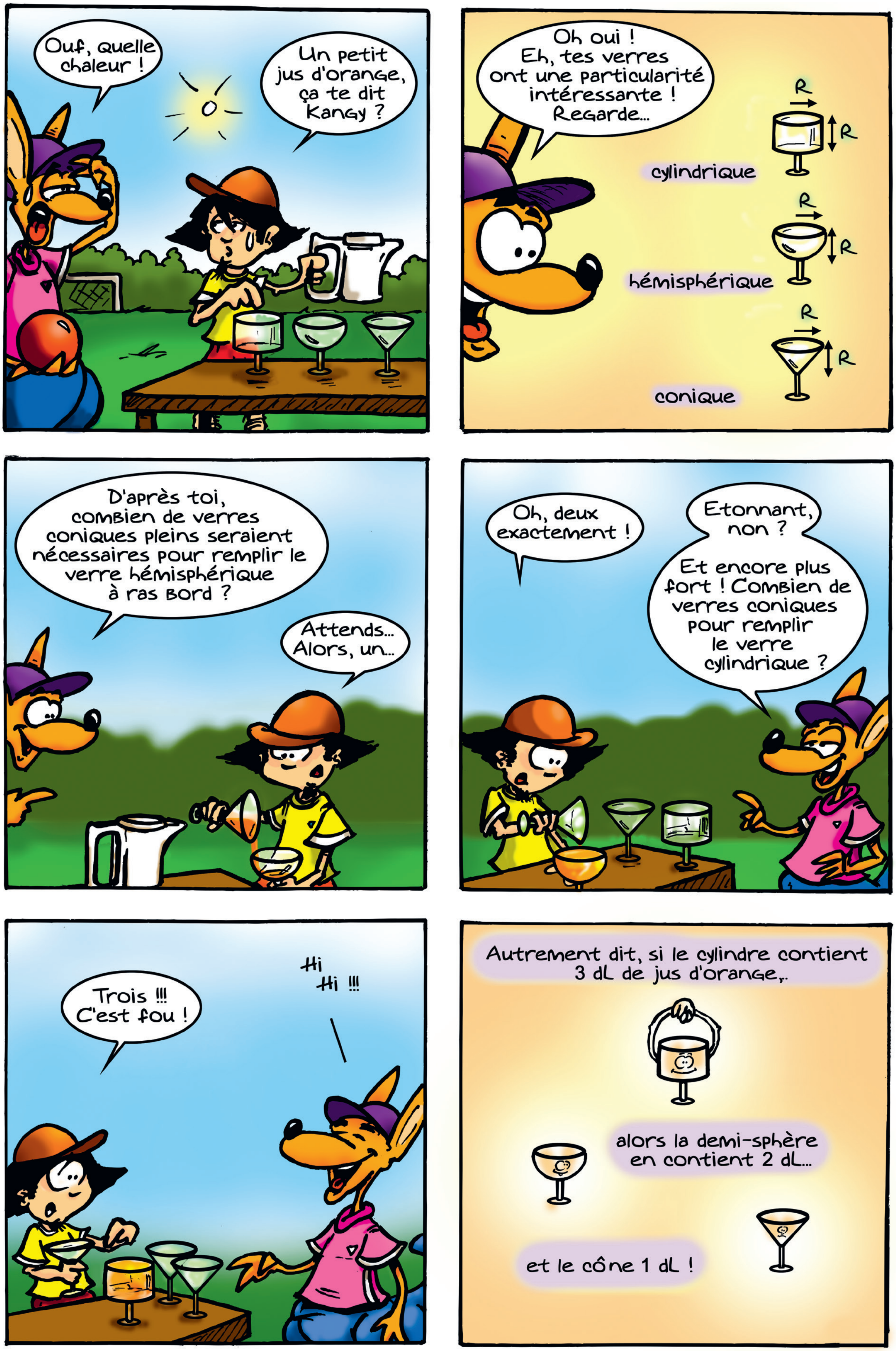
$$\frac{2}{3}(\pi R^2) \times R.$$

Le volume de la sphère entière est donc bien

$$\frac{4}{3}(\pi R^3) \text{ !!!}$$

Et les volumes des trois corps,
cône, demi-sphère, cylindre,
sont bien en progression arithmétique :

$$1 \times \frac{\pi R^3}{3} \qquad 2 \times \frac{\pi R^3}{3} \qquad 3 \times \frac{\pi R^3}{3}.$$


Ouf, quelle chaleur !
Un petit jus d'orange, ça te dit Kangy ?
Oh oui ! Eh, tes verres ont une particularité intéressante ! Regarde...
R
R
cylindrique
R
R
hémisphérique
R
R
conique
D'après toi, combien de verres coniques pleins seraient nécessaires pour remplir le verre hémisphérique à ras bord ?
Attends... Alors, un...
Oh, deux exactement !
Etonnant, non ?
Et encore plus fort ! Combien de verres coniques pour remplir le verre cylindrique ?
Trois !!! C'est fou !
Hi Hi !!!
Autrement dit, si le cylindre contient 3 dL de jus d'orange,..
alors la demi-sphère en contient 2 dL...
et le cône 1 dL !