

L'histoire des trente-six officiers

Matt arriva chez Alice en brandissant un petit livre relié à l'ancienne.

— Alice ! Alice ! Mon grand-père m'a prêté ce joli bouquin pour te le montrer. Il s'agit des *Lettres à une Princesse d'Allemagne*. On dirait qu'il a été écrit pour toi ; il y a plein de sciences et beaucoup de mathématiques...



— J'en ai entendu parler, Matt. Je crois que c'est un livre que Léonhard Euler a écrit vers 1760 pour l'éducation d'une nièce du grand roi Frédéric de Prusse. C'est très gentil de me l'avoir apporté. Figure-toi que je pensais justement à Euler ce matin en réfléchissant sur un **sudoku** que je trouvais un peu facile. Car je crois bien que c'est lui qui a posé un célèbre problème, illustre parent des sudokus actuels, mais beaucoup plus difficile. Kangy peut certainement nous en dire plus à ce sujet...

Kangy profita de l'occasion pour prendre la parole de l'air doctoral qu'il affectionnait.

— Sudoku est une contraction du japonais SUJiwa DOKUshin ni Kagiru, qui peut signifier "les chiffres ne peuvent apparaître qu'une seule fois". C'est un **jeu** basé sur les **permutations** ; car il s'agit de **permuter** (c'est-à-dire, changer l'ordre) des **éléments d'une certaine liste de choses**.

Dans le Sudoku actuel, cette liste de choses est représentée par les chiffres de 1 à 9 :

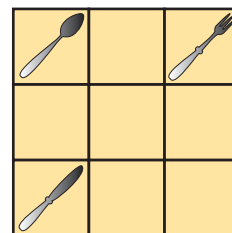
1 2 3 4 5 6 7 8 9.

Mais on pourrait imaginer que les chiffres soient remplacés par des couleurs, des cartes ou des objets quelconques...

Question Jeu 16

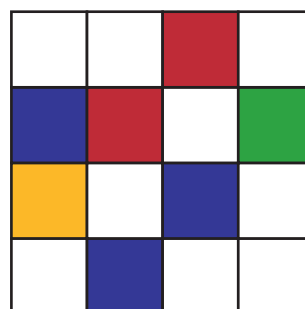
Sur chaque ligne et sur chaque

colonne, il doit y avoir exactement une panoplie complète (une fourchette, une cuillère et un couteau).



Question Jeu 17

Sur chaque ligne et sur chaque colonne, il doit y avoir les quatre couleurs.



Il s'agit donc de placer des choses dans des cases de manière que chacune n'apparaisse qu'une et une seule fois dans certaines configurations de cases. Ainsi, le jeu le plus simple se présente sous la forme d'un **carré** : **dans chaque ligne et dans chaque colonne de ce carré, la règle demande que chaque élément n'apparaisse qu'une et une seule fois.**

C'est ainsi qu'Euler, peut-être pour se reposer de la Présidence de l'Académie de Berlin, aimait s'intéresser à un divertissement logique connu sous le nom de « carré latin ». Les éléments étaient des **lettres** (qui pouvaient être latines, grecques ou gothiques, d'où le nom du jeu).

Voici, par exemple, un carré latin d'ordre 6, où chaque lettre a été associée à une couleur pour rendre l'agencement plus manifeste.

A	B	C	D	E	F
F	A	B	C	D	E
E	F	A	B	C	D
D	E	F	A	B	C
C	D	E	F	A	B
B	C	D	E	F	A

Question Jeu 18 Compléter ce carré latin "d'ordre 4" avec les lettres A, B, C, D.

A			C
	B		
	A		
		D	

Cependant le jeu n'est pas assez intéressant si l'on ne rajoute pas quelques conditions pour en corser un peu la difficulté. Euler avait eu l'idée de placer dans une case, non pas seulement une lettre, mais un couple de lettres (l'une latine et l'autre grecque), chacune respectant séparément la règle imposée, et en plus toutes les combinaisons de paire de lettres

étant présentes.

Il appelait cela des carrés « gréco-latins ».

Voici, par exemple, un carré gréco-latin d'ordre 5.

A α	C β	E γ	B δ	D ϵ
E ϵ	B α	D β	A γ	C δ
D δ	A ϵ	C α	E β	B γ
C γ	E δ	B ϵ	D α	A β
B β	D γ	A δ	C ϵ	E α

Question Jeu 19

Pouvez-vous compléter ces deux carrés gréco-latins d'ordre 3 ?

A α		C β
		B α

A α		
	B β	

Bien évidemment, on peut rendre le jeu plus attrayant en remplaçant les lettres grecques et latines par d'autres caractères : des couleurs, des hauteurs, des qualités...

Voici, par exemple, un carré gréco-latin d'ordre 4 avec des cartes à jouer.

2 \clubsuit	3 \spadesuit	1 \heartsuit	4 \diamondsuit
1 \diamondsuit	4 \heartsuit	2 \spadesuit	3 \clubsuit
4 \spadesuit	1 \clubsuit	3 \diamondsuit	2 \heartsuit
3 \heartsuit	2 \diamondsuit	4 \clubsuit	1 \spadesuit

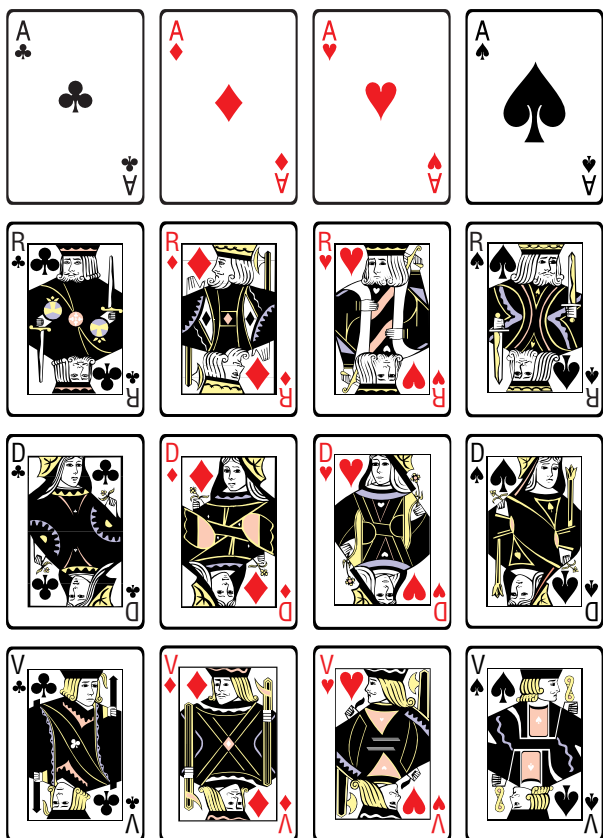
**Question
Jeu** **20**

Placer les nombres 1, 2, 3, 4 et 5 de manière qu'aucun ne figure plus d'une fois dans une même ligne ou une même colonne ET placer cinq couleurs de manière qu'aucune ne figure plus d'une fois dans une même ligne ou une même colonne, chaque couleur n'étant associée qu'une et une seule fois à chaque nombre.

1				
		4		
				2
	5			
			3	

**Question
Jeu** **21**

Placer ces cartes sur un carré 4 × 4 de manière qu'aucune couleur ni aucune hauteur ne se retrouvent dans une même ligne ou une même colonne.



Le sudoku, lui, est une autre variante, parue pour la première fois en 1979 dans la revue américaine *Dell Puzzles Magazine*. Mais l'engouement pour ce jeu démarra au Japon en avril 1984 dans une revue de jeux logiques. Une contrainte supplémentaire était imposée : le carré de jeu étant un carré 9 × 9, il est divisé en 9 carrés 3 × 3 et la règle demande que, dans chacun de ces carrés 3 × 3, les neuf chiffres apparaissent chacun une fois et une seule.

Vous pouvez vous entraîner sur des sudokus plus simples que les 9 × (3 × 3) comme ceux que nous vous proposons ci-après : un 4 × (2 × 2) et un 6 × (2 × 3), mais le plus instructif est d'inventer vous-même un sudoku pour vos amis...

**Question
Jeu** **22**

	1		
			2
		2	
4			

Avec les chiffres de 1 à 4.

**Question
Jeu** **23**

Avec les chiffres de 1 à 6.

	6			2	
		1			3
	4		2		
					1
		3		4	
					6

**Question
Jeu** **24**

9	4		1				5	8
6				5				4
		2			3	1		
	2						6	
5		8		2		4		1
	6						8	
		1	6			7		
7				4				3
4	3		5		9			2

Pour finir, revenons à Leonhard Euler et à ses car-
rés gréco-latins. Avec son génie de la pédagogie, il
en inventa une présentation amusante connue sous
le nom de *problème des 36 officiers*.

Voici comment la raconte André Sainte-Laguë,
scénariste des salles de mathématiques du Palais de
la Découverte à son ouverture en 1937, dans son
ouvrage *Des nombres et des lignes*.

Le maharadjah de Kapourdjan avait exactement 36
officiers dans son armée. Ils étaient de six grades
différents car six étaient des officiers du premier mérite
ou mérite suprême ; six autres étaient du second mérite,
et ainsi de suite jusqu'aux six derniers, qui étaient du
sixième et dernier mérite. Ils appartenaient aux six
corps d'armée de l'État : infanterie, artillerie, génie,
forteresses, cavalerie, le sixième corps étant composé
des éléphants avec leurs cornacs et comprenant aussi
bien les éléphants d'assaut chargés de tout briser sur
leur passage en cas de guerre offensive, que les
éléphants formant le train des équipages et ayant
mission de traîner les lourdes charges. Pour les parades,
ils étaient disposés chaque fois en carré, selon un
certain ordre qu'à vrai dire nous ignorons.

Le bouffon Fha-Nudji raconta un jour au maharadjah
que son grand-père, qui d'ailleurs ignorait l'artillerie,
n'avait que 25 officiers d'ordonnance des premier,
deuxième, troisième, quatrième et cinquième mérites
et qu'il les disposait de telle façon que chaque rangée
comportait un officier et un seul de chaque mérite et
un officier et un seul de chaque corps, aussi bien de
gauche à droite que d'avant en arrière. Comme le
maharadjah s'étonnait qu'une telle chose fût possible,
le bouffon avec des jetons de 5 couleurs différentes,
sur chacun desquels il marqua des numéros allant de
1 à 5, lui forma le tableau suivant, dont la loi de
formation est d'ailleurs facile à comprendre :

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

Le bouffon fit par ailleurs remarquer que si le grand-
père du maharadjah avait agi ainsi, c'était pour
respecter la coutume d'un de ses aïeux qui, n'ayant
que quatre corps différents, le génie n'existant pas tout
d'abord dans ses armées, avait rangé ses 16 officiers
suivant la même loi, ce qui était facile à faire.

Le bouffon avait aussi examiné les cas de 3 corps et 3
mérites ou 2 corps et 2 mérites, qui naturellement sont
beaucoup plus simples.

Le maharadjah demanda alors si on savait pourquoi
son père, en créant l'artillerie, en même temps que
d'ailleurs il créait le sixième mérite, n'avait pas continué
à appliquer la loi ancestrale. Le bouffon lui répondit,
ce qui était l'exacte vérité, qu'aucun des maréchaux
du palais n'avait trouvé la façon de s'y prendre. À la
suite de quoi l'un avait été fusillé, deux autres destitués
et finalement, de guerre lasse, on avait renoncé à
effectuer un tel rangement !

Le problème des trente-six officiers d'Euler n'a,
en effet, **pas de solution** !

Le maharadjah, lui, a trouvé une solution : il a créé
un septième corps d'armée et un septième mérite.
Bien sûr, il a mal compris pourquoi ce qui était
possible avec 16 ou 25 officiers ne l'était plus avec
36 ... et le redevenait avec 49 (et même 64 ou 81).
Heureusement, les mathématiciens ont, depuis, su
expliquer pourquoi certaines impossibilités se
cachaient dans le jeu complexe des combinaisons
et des permutations. Mais ceci est une histoire plus
grave qu'il n'y paraît...

Hyper-Sudoku

Kangy était très content d'avoir inventé un sudoku $16 \times (4 \times 4)$...

Las ! On a pu très vite trouver sur Internet, non seulement des sudokus hexadécimaux mais aussi des $36 \times (6 \times 6)$ et des $49 \times (7 \times 7)$.

Et on peut certainement rencontrer des sudokus $100 \times (10 \times 10)$ avec les cent « chiffres » de 00 à 99... Recherche visuelle difficile garantie !



Placer les 16 caractères du système hexadécimal **0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F** de manière qu'aucun d'entre eux ne figure deux fois dans une même ligne, une même colonne ou un même carré 4×4 .

Voir en bas de page 31.

		F	A	3		C	6		5		4		7	D	1
C			7		E	1		B		F				2	A
5		B	4	A			D				6	C			
						7			3	1		0		5	
1	B	6	8			0	9	C	A		3	E		F	
							F	E					9	0	8
F	A	C			D		8		9		5				
				6		A		1		2					4
	7				C	2		9					4		5
		5		9						C	D	6			
		9		1	F		A			4		3		7	0
6		4	D		3	E		7			2			B	
B	0	A					C	D	2	7	1		E	4	
			1	0					F				B		9
9	C			E		D	3		4		A	5			
		8	F			B	1	3			0			A	D

SOLUTIONS

les deux cases jouxtant à la fois $A\alpha$ et $B\beta$.

QJ 20.

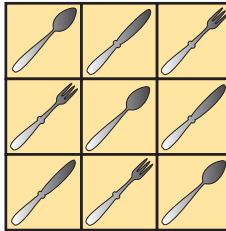
Une deuxième solution est donnée page 28, avec des jetons, pour le « problème des 25 officiers ».

1	2	3	5	4
5	3	4	2	1
3	1	5	4	2
4	5	2	1	3
2	4	1	3	5

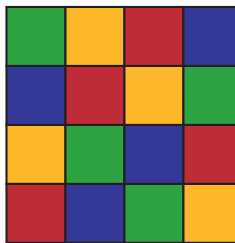
QJ 15.

9	29	7
13	15	17
23	1	21

QJ 16.



QJ 17.



QJ 18.

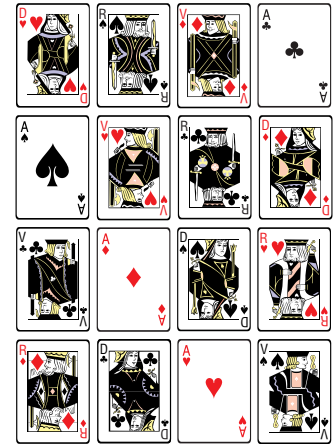
A	D	B	C
C	B	A	D
D	A	C	B
B	C	D	A

QJ 19.

Il n'est pas possible de compléter le deuxième carré car il faudrait mettre deux fois le même couple $C\gamma$ dans

A	B	C
α	γ	β
B	C	A
β	α	γ
C	A	B
γ	β	α

QJ 21. Par exemple :



QJ 22.

2	1	4	3
3	4	1	2
1	3	2	4
4	2	3	1

QJ 23.

3	6	5	1	2	4
4	2	1	6	5	3
1	4	6	2	3	5
5	3	2	4	6	1
6	1	3	5	4	2
2	5	4	3	1	6

QJ 24.

9	4	7	1	6	2	3	5	8
6	1	3	8	5	7	9	2	4
8	5	2	4	9	3	1	7	6
1	2	9	3	8	4	5	6	7
5	7	8	9	2	6	4	3	1
3	6	4	7	1	5	2	8	9
2	9	1	6	3	8	7	4	5
7	8	5	2	4	1	6	9	3
4	3	6	5	7	9	8	1	2

QJ 25.

Solution sur internet : www.mathkang.org