Bagdad 830

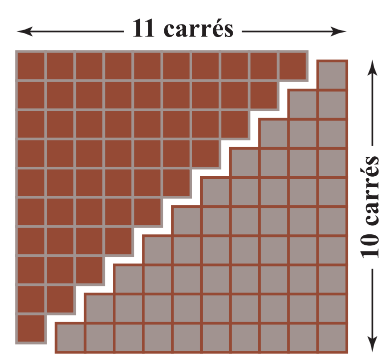
Les belles formules des mathématiciens arabes

En ces temps vivait à Bagdad, calife entre les califes, le sage et très puissant calife Abd Allah al-Mamun. Il avait envoyé ses ambassadeurs de par le monde et jusqu'à Byzance, chargés de présents magnifiques. Et ses ambassadeurs lui avaient rapporté en échange de ses présents, les grands livres des Anciens : Platon, Aristote, Euclide… Alors de tout son immense empire avaient afflué les savants, médecins, astronomes et mathématiciens de toutes origines et de toutes religions, syriens, juifs, ouzbeks ou perses, héritiers des civilisations les plus anciennes.
Al-Mamun le très sage les accueillait, les nourrissait et les abreuvait pour que grandisse avec eux l'arbre de la connaissance humaine.
Là, dans l'immense bibliothèque de la Maison de la Sagesse, les plus savants d'entre les savants étaient réunis afin d'expliquer le Monde.
Parmi eux, al-Kwarismi, auteur du *Traité des nombres hindous*, expliquait l'usage des chiffres venus des Indes, en particulier, du zéro. Ce savant, créateur de l'Algèbre, fonda la grande école des mathématiciens arabes qui fit progresser les sciences pendant plus de cinq siècles.
En particulier, ils mirent au point des formules simples et belles, que nous vous démontrons ci-dessous.

Bibliothèque à Bagdad au temps des califes abbassides, BnF, Paris.

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 ?

Imaginons qu'il s'agisse de petits carrés et que l'on mette l'une à côté de l'autre les piles de 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10 carrés. On forme ainsi un escalier.
Pour compter les carrés formant cet escalier, ajoutons-lui un escalier identique (ici représenté symétriquement en brun) et assemblons le tout…
Cela fait un rectangle de 10 unités de large et 11 unités de long, soit 10 × 11 = 110 carrés.

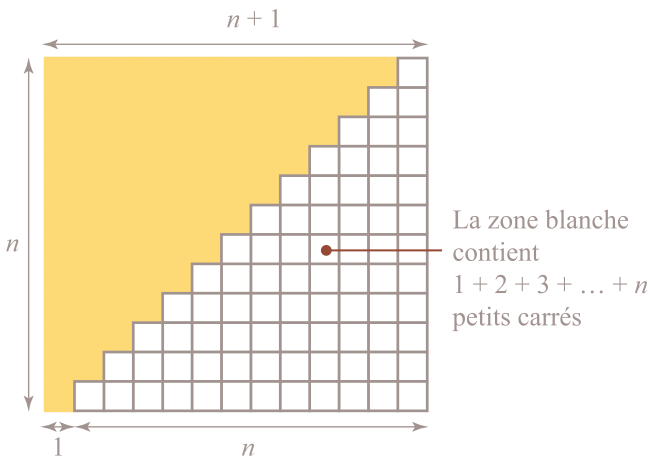


La somme 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 vaut donc la moitié de 110, soit 55 !

La somme des n premiers entiers

Avec exactement le même raisonnement, il est facile de calculer la somme de tous les nombres entiers jusqu'à un entier n :

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n.$$



En effet, le nombre de carrés de la zone blanche est exactement la moitié du nombre de petits carrés du rectangle tout entier, soit $\dfrac{n \times (n+1)}{2}$.

? 10

La somme des premiers nombres impairs

Effectue les calculs ci-dessous :

$1 + 3 = \ldots\ldots$

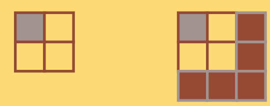
$1 + 3 + 5 = \ldots\ldots$

$1 + 3 + 5 + 7 = \ldots\ldots$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \ldots\ldots$

Observe les résultats trouvés. **Il y a quelque chose à remarquer ! Quoi donc ?**

Les dessins commencés ci-dessous aident à expliquer ce que tu viens de remarquer. Ils concernent les deux premiers calculs. Saurais-tu faire un dessin qui illustre la dernière égalité et expliquer le lien entre les égalités écrites et les dessins proposés ?

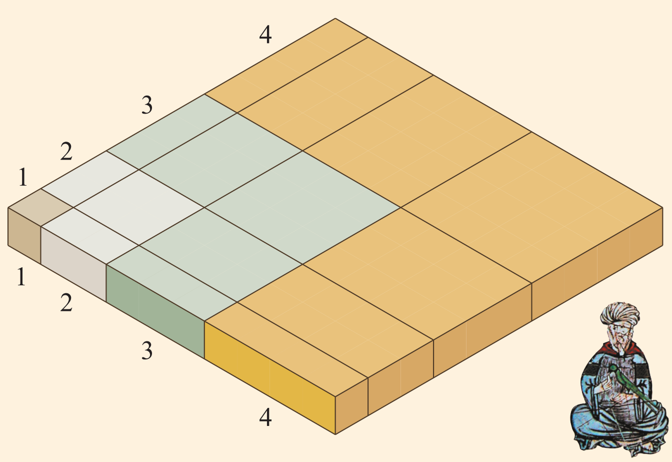


Pour nous montrer que tu as compris, trouve en moins de trois secondes le résultat de cette longue addition :

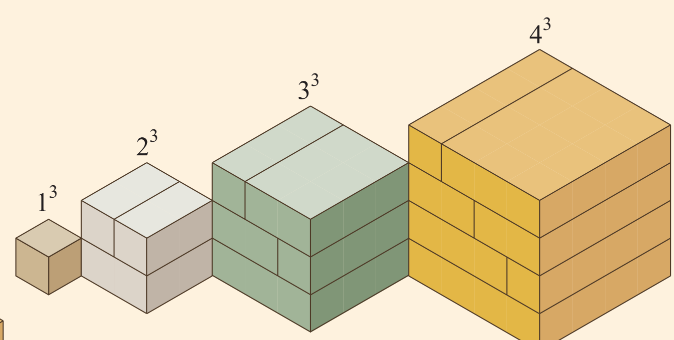
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19.$$

La formule magique d'al-Karagi

Si tu calcules $1 + 2 + 3 + 4$, tu trouves 10.
Si tu calcules $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64$, tu trouves 100.
Étonnant, non ? Le carré de la somme des premiers entiers est égal à la somme de leurs cubes !
Et ceci est vrai quel que soit l'entier où l'on s'arrête.



Les dessins ci-dessous te montrent comment la surface $(1 + 2 + 3 + 4)^2$ peut se décomposer en 4 « équerres », et comment chaque équerre, astucieusement découpée, peut reconstituer un cube. D'où :
$(1 + 2 + 3 + 4)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$.



Le mathématicien arabe al-Karagi montra, dans un livre paru aux alentours de l'an 1000, que cette formule, peut se généraliser avec n'importe quel entier n :

$$(1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3.$$