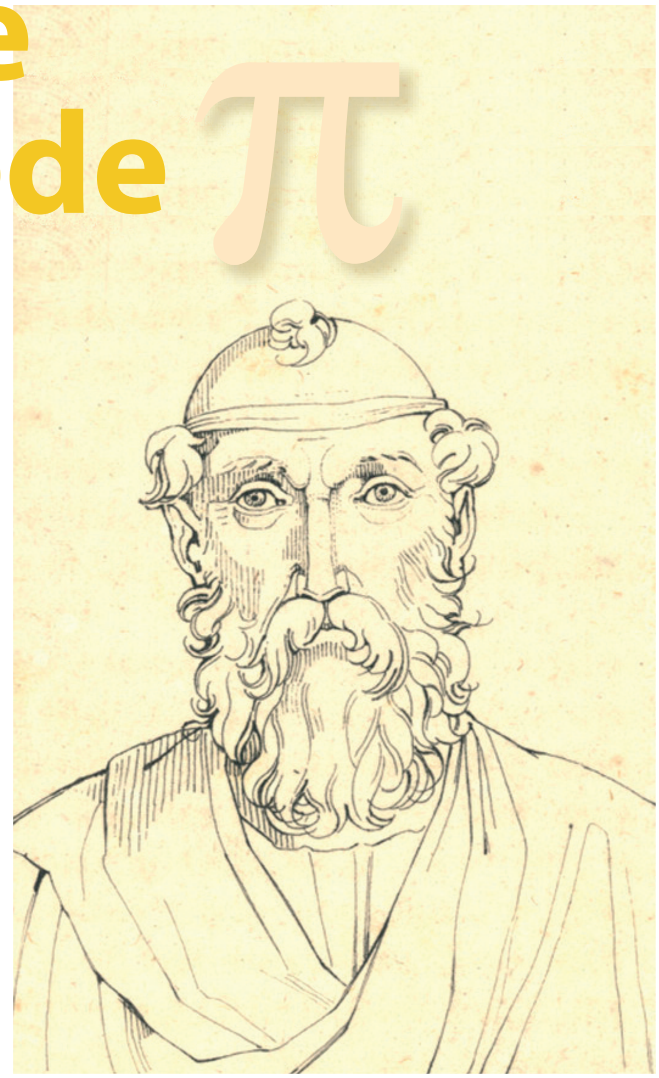
Syracuse  – 212

Le nombre d'Archimède π



Nous sommes en 212 avant Jésus-Christ, dans la ville grecque de Syracuse, en Sicile. Rome et Carthage se disputent ce lieu stratégique. Ce jour-là, la ville est le théâtre de tragiques évènements. Les soldats romains, en guerre contre les Carthaginois, se sont emparés de Syracuse. Et l'un des soldats romains vient de transpercer de son glaive le plus illustre des citoyens de la ville, Archimède, qui, plongé dans ses pensées, n'a pas réagi assez vite à son ordre.
Ainsi, au grand regret de tous, et même du général romain Marcellus, vient de périr un des plus grands savants du monde antique. Les funérailles d'Archimède seront grandioses et sur son tombeau seront gravés une sphère et un cylindre. Archimède fut, en effet, le vrai maître des "objets ronds".
Depuis très longtemps, les hommes avaient remarqué quelque chose d'étonnant. En mesurant le tour d'un objet rond et en divisant la mesure obtenue par le diamètre de l'objet, on obtenait TOUJOURS le même résultat, un résultat voisin de 3.

Mais ce nombre étonnant ne vaut pas exactement 3.

Un nombre fabuleux

Ce nombre magique, quotient immuable de la longueur d'un cercle par son diamètre préoccupa tant Archimède qu'il écrivit un traité à son sujet, *La mesure du cercle*, dans lequel, avec des méthodes que tu peux comprendre (voir p.13), il chercha à préciser la valeur de ce nombre.

Il démontra que ce nombre se trouvait entre

$$3 + \frac{10}{71} \text{ et } 3 + \frac{1}{7}.$$

Ce qui donne, avec notre écriture décimale, entre 3,1408 et 3,1429.
Tu as bien sûr reconnu ce quotient étonnant et tu sais comment on le désigne de nos jours !

Un nombre dont le nom est une lettre

C'est au 17^{e} siècle, plus de 1800 ans après Archimède, que l'on prit l'habitude de désigner le quotient de la longueur du cercle par son diamètre avec une lettre grecque, π, première lettre du mot grec "périmètre". Pourquoi ce choix de désigner ce nombre par une lettre et non par une suite de chiffres, comme on le fait pour les autres nombres ?
Les mathématiciens ont compris assez vite une propriété de ce quotient pas comme les autres.

Dans les divisions qui ne tombent jamais juste, on observe un chiffre ou une suite de chiffres qui se répètent. Par exemple :

$$\frac{1}{3} = 0,33333\ldots \text{ ou } \frac{54}{11} = 4,90909090\ldots$$

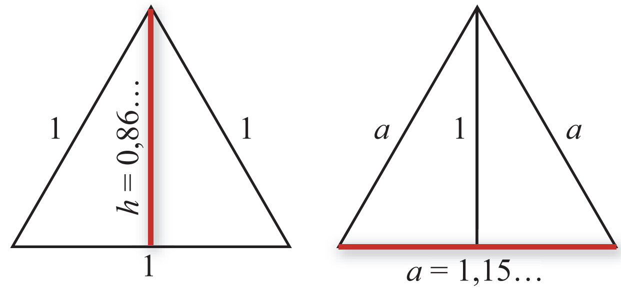
Le nombre π n'a pas la même propriété : la suite de ses décimales est illimitée ; mais, aussi loin qu'on aille, il n'y a pas dans les décimales de π de suite de chiffres qui se répète.
Alors les mathématiciens ont décidé d'utiliser une lettre pour nommer ce nombre compliqué. Et tu verras que le désigner par le seul symbole π n'empêche pas de s'en servir pour calculer, bien au contraire…

? **Un tour de pouce** 9

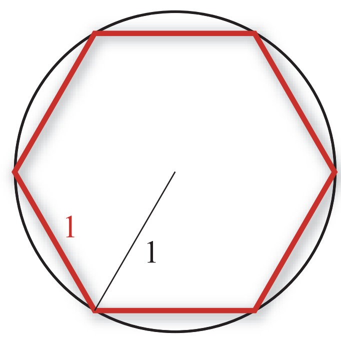
Tom a enroulé une ficelle à la base de son pouce. Il la déroule et peut ainsi mesurer le tour de son pouce. **Quelle est, à ton avis, la réponse la plus proche de sa mesure ?**
A• 2 cm B• 4 cm C• 6 cm D• 10 cm

L'idée d'Archimède

Une remarque préalable.
Tu peux vérifier toi-même les mesures en réalisant les dessins ci-contre avec le décimètre comme unité :
— Dans un triangle équilatéral de côté 1, la hauteur mesure environ 0,87.
— Dans un triangle équilatéral de hauteur 1, le côté mesure environ 1,15.



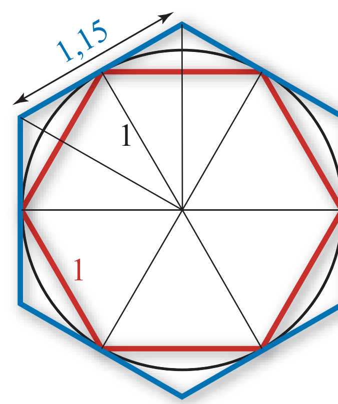
Le point de départ : l'hexagone dans le cercle et l'hexagone autour du cercle.
• rayon du cercle = 1
• diamètre du cercle = 2
• longueur du cercle = $2 \times \pi$.



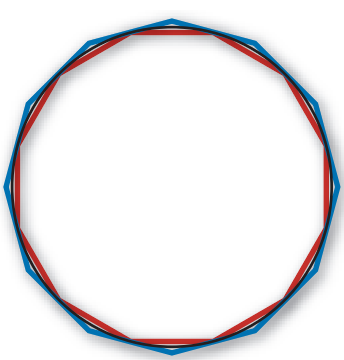
• côté de l'hexagone rouge = 1
• périmètre de l'hexagone rouge = 6.
L'inégalité : $6 < 2 \times \pi$
traduit que le périmètre de l'hexagone rouge est plus petit que celui du cercle.
Et, en divisant par 2, $3 < \pi$.

En utilisant la remarque préalable ci-dessus (triangle équilatéral de droite) :
• côté de l'hexagone bleu ≈ 1,15
• périmètre de l'hexagone bleu ≈ 6,9.
L'inégalité : $2 \times \pi < 7$
traduit que le périmètre de l'hexagone bleu est plus grand que celui du cercle.
On a, en divisant par 2 : $\pi < 3{,}5$.

D'où l'encadrement : $3 < \pi < 3{,}5$



L'idée d'Archimède : remplacer l'hexagone par un polygone ayant de plus en plus de côtés.
Le cercle est cerné de plus près !
Il est coincé entre deux polygones à douze côtés.



Il est plus long que le rouge mais plus court que le bleu. Et Archimède sait calculer les périmètres de ces deux dodécagones
Ensuite, il continue sur le même principe, en doublant le nombre de côtés des polygones intérieur et extérieur. Il s'approche de plus en plus près du cercle. Il coince ainsi le cercle entre deux polygones à 24, puis à 48 côtés, dont il calcule les périmètres. Il va jusqu'à des polygones réguliers à 96 côtés.

L'encadrement de π qu'il obtient est alors :

$3{,}1408 < \pi < 3{,}1429$.

Pas mal comme précision !