Florence 1638

Galilée
devant l'infini

La scène se passe, en 1638, dans les jardins du palais Pitti à Florence où le jeune Torricelli a été appelé pour faire monter l'eau de l'Arno vers les magnifiques terrasses qui dominent la ville : Galilée est venu s'y reposer pour achever son *Dialogue au sujet de deux sciences nouvelles* qu'il est venu présenter à quelques-uns de ses fidèles élèves.

— Prudence, Maître, lui conseille Evangelista Torricelli, vous avez pu éviter le bûcher, en vous reniant, il y a cinq ans, mais l'Eglise romaine ne vous fera plus aucun cadeau. Vous dites apporter quelques lumières sur l'infini … souvenez-vous de Giordano Bruno qui a fini brûlé à Rome sur le Campo dei Fiori, pour avoir prétendu que le monde, bien que créé par Dieu, pouvait être fini et borné.

— Mes idées ne concernent pas les mystères de la religion mais plutôt ceux que l'on rencontre chez les nombres ; j'ai imaginé pouvoir écrire la suite des nombres entiers, toute entière :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21…

Et j'ai aussi imaginé d'écrire la suite des nombres pairs, tous les nombres pairs :

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42…

Que crois-tu alors ? Ai-je écrit autant de nombres dans une suite que dans l'autre ? Ou bien en ai-je écrit deux fois moins dans la deuxième ?

— Je suis comme le Simplicio de votre livre, Maître, et ne sais que penser,…

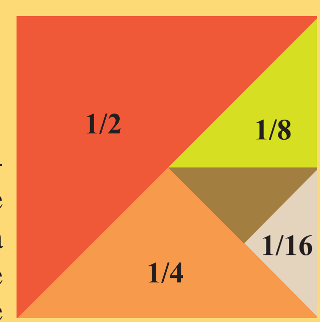
[*Un extrait du texte de Galilée est donné page suivante*.]

12

?

Le dessin ci-dessous montre que

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 = 1 - 1/16$$



En t'inspirant de ce dessin, peux-tu résoudre le problème suivant :

10 personnes se partagent un trésor ; le premier en prend la moitié ; le deuxième prend la moitié de ce qui reste ; le troisième la moitié de ce qui reste ; … et ainsi de suite, chacun prenant la moitié de ce que les précédents ont laissé.

Quelle fraction reste-t-il du trésor lorsque le dixième a pris sa part ?

Le trésor peut-il être entièrement distribué si le monde entier se le partage ?

Il reste moins d'un millième du trésor lorsque le dixième a pris sa part (exactement 1/1024).
Si le monde entier se le partage, il n'y a presque plus rien à partager. On peut dire que si le nombre de personnes "tend vers l'infini", le trésor tend à être complètement distribué.

Peut-on comparer les infinis ?

Extrait des *Dialogues au sujet de deux sciences nouvelles* de Galiléo Galiléi


Je suppose que vous savez très bien distinguer les nombres carrés des non carrés.


Je sais parfaitement qu'un nombre carré est celui qui naît de la multiplication d'un nombre par lui-même : ainsi quatre, neuf, etc., sont des nombres carrés, étant engendrés l'un par le nombre deux, l'autre par le nombre trois, multipliés par eux-mêmes.


Très bien. Et vous savez encore que si les produits s'appellent carrés, les facteurs des produits, c'est-à-dire les nombres qui se multiplient, sont appelés côtés ou racines ; quant aux nombres qui ne résultent pas de la multiplication d'un nombre par lui-même, ils ne sont aucunement des carrés. Donc, si je dis que tous les nombres, carrés et non carrés, sont plus nombreux que les carrés seuls, j'énonce une proposition très véritable. Sommes-nous d'accord ?


Il est impossible de ne pas l'être.


Si maintenant je demande combien il y a de nombres carrés, on pourra répondre en toute vérité qu'ils sont aussi nombreux que leurs propres racines, attendu que tout carré a sa racine, toute racine son carré, qu'aucun carré n'a plus d'une seule racine, ni aucune racine plus d'un seul carré.


C'est ainsi.


Mais si j'en arrive à demander combien il y a de racines, on sera forcé de répondre qu'il y en autant que de nombres, car il n'est pas un nombre qui ne soit racine de quelque carré ; cela étant, nous pouvons affirmer que les nombres carrés sont autant que tous les nombres puisqu'ils sont autant que leurs racines et que tous les nombres sont racines. Cependant, nous disions, pour commencer, qu'il y a plus de nombres en tout qu'il n'y a, en tout de carrés, la majeure partie des nombres étant non carrés. Et même les carrés vont se raréfiant dans une proportion de plus en plus grande à mesure que l'on accède à de plus grands nombres ; ainsi, jusqu'à cent, il y a dix carrés ; autrement dit : la dixième partie ; si nous allons jusqu'à dix mille, la centième ; et jusqu'à un million, la millième. Et pourtant, dans le nombre infini, si nous étions à même de le concevoir, nous devrions reconnaître que les carrés sont autant que tous les nombres.


À quel parti faut-il donc s'arrêter en cette occurrence ?


Pour moi, je ne vois pas d'autre parti à prendre que d'admettre qu'infinis sont les nombres, infinis les carrés, infinis les racines, que la multitude des carrés n'est pas inférieure à celles de tous les nombres, ni celle-ci supérieure à celle-là, et, en dernière conclusion, que l'égal, le plus et le moins sont des attributs qui ne conviennent pas aux infinis, mais seulement aux quantités limitées. Aussi, quand le signor Simplicio me présente plusieurs lignes inégales et me demande comment il peut se faire que les plus grandes ne contiennent pas plus de points que les plus petites, je lui réponds qu'elles n'en contiennent ni plus, ni moins, ni autant, mais qu'en chacune d'elles ils sont infinis ; ou si je m'avisais de lui répondre que les points, dans l'une, sont autant que les nombres carrés, dans l'autre autant que tous les autres, et dans chacune une infinité ?

1• On lit, de gauche à droite en haut : 340 ; 12 ; 192 ; puis,  peut représenter 2, mais aussi 120.

2• a)  = 27,  = 53,  = 34.
b) 856 = 14 × 60 + 16 = 14 soixantaines et 16 unités = .

3• Les mesures des angles en degrés utilisent beaucoup 60 et 6 × 60 ; certainement à cause de la facilité de construction d'un angle de 60°. La mesure du temps, les heures, minutes, secondes sont aussi un souvenir de la base 60.

4• 22, 1, 2, 18, 15 ; V, A, B, R, O ; BRAVO.

5• $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}=\frac{32}{64}+\frac{16}{64}+\frac{8}{64}+\frac{4}{64}+\frac{2}{64}+\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$. Thot dut rajouter $\frac{1}{64}$.

6• D'une part, le père, dans le testament n'a pas distribué tout son avoir car la somme 1/2 + 1/3 + 1/9 ne fait pas 1, mais 17/18. D'autre part, le nombre de chameaux, 17, n'est pas divisible par 2, ni par 3, ni par 9. Les volontés du père ne peuvent donc pas être respectées exactement ; mais, avec la solution du mathématicien, tout le monde a un peu plus. Du coup tout le monde est content, y compris le vieux père dans sa tombe.

7• $\frac{3}{2}+\frac{1}{5}=\frac{3\times 5}{2\times 5}+\frac{1\times 2}{5\times 2}=\frac{15}{10}+\frac{2}{10}=\frac{17}{10}$. 1,5 + 0,2 = 1,7. (Les termes des deux sommes sont égaux.)

8• La diagonale mesure 7,071… unités, soit entre 7 et 7,1 ; ce qu'un dessin précis t'aura permis de remarquer.

9• réponse C (qui correspond à un diamètre d'un peu moins de 2 cm à la base du pouce).

10• $1+3=4=2^2$. $1+3+5=9=3^2$. $1+3+5+7=16=4^2$. $1+3+5+7+9=25=5^2$.
La somme des n premiers nombres impairs vaut n^2. La somme proposée a 10 termes et vaut donc $10^2=100$.

11• Si on tape le calcul directement, la calculatrice donne le résultat en « notation scientifique ».

×	1220 M	703 125
8 192	9 994 240 M	5 760 M = 5 760 000 000

En ajoutant 9 994 240 M + 5 760 M, on trouve 10 000 000 millions tout juste. Cela provient du fait que $8192 = 2^{13}$ (un produit de 13 facteurs égaux à 2) et que $1\,220\,703\,125 = 5^{13}$ (un produit de 13 facteurs égaux à 5) donc le produit final est bien 10^{13}.

13• De gauche à droite et de haut en bas les dimensions des triangles rectangles sont :
(5, 12, **13**), (8, 15, **17**), (**7**, 24, 25), (12, **35**, 37), (**39**, 52, 65), (33, **56**, 65), (48, **55**, 73).

14• 23, 37 et 89. **15•** Fais des essais. **16•** 2, 3, 5, 11, 23, 29, 41, 53, 83, 89.

17• 84 a 3 diviseurs premiers : 2, 3, 7. Et 117 a 2 diviseurs premiers : 3 et 13. Les entiers 8, 16, 64,… , 27, 81,… n'ont chacun qu'un seul diviseur premier. 210 = 2 × 3 × 5 × 7 a quatre diviseurs premiers.

18• La propriété des parts égales n'est vraie que pour des nombres positifs. Elle peut être fausse quand certains des nombres sont négatifs, en particulier, dans le cas présent, où $a = d$ = opposé de b = opposé de c.
Il faut faire attention avec les nombres négatifs et l'ordre des nombres, on fait facilement des erreurs.

19• $(-1)\times(-1+1) = \big((-1)\times(-1)\big)+\big((-1)\times 1\big)$ donc $(-1)\times 0 = \big((-1)\times(-1)\big)+\big(-1\big)$ et $0 = \big((-1)\times(-1)\big)+\big(-1\big)$. $(-1)\times(-1)$ est donc l'opposé de -1 qui est 1.

20• 28→14→7, le bibix de 28 est 2. 32→16→8→4→2→1, le bibix de 32 est 5. 34→17, le bibix de 34 est 1. Les nombres dont le bibix vaut 0 sont les impairs. Les nombres dont le bibix vaut au moins 1 sont les pairs. Les nombres dont le bibix vaut au moins 3 sont les multiples de 8.