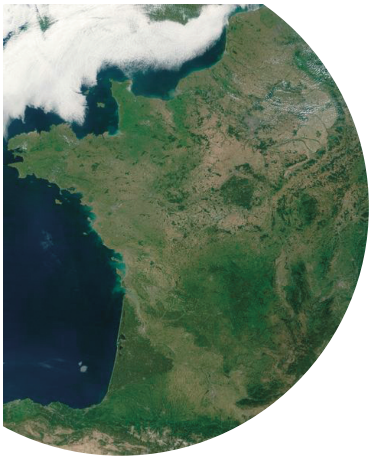


Toulouse

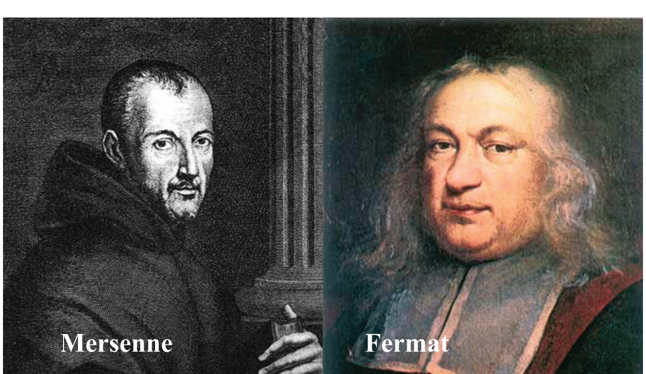
1640

Fermat
et l'impossible équation

En cette soirée de fin d'été 1640, le révérend Père Mersenne descendit de sa voiture, fit dételer ses chevaux et pénétra au couvent des Minimes, à Toulouse, dans le faubourg de l'église Saint-Sernin ; il était content d'y être reçu par des frères de son ordre, car il venait de faire un voyage fatigant.

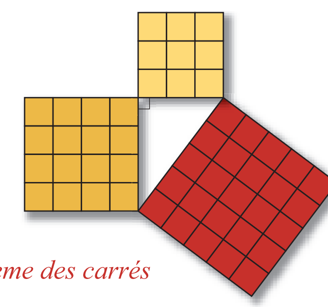
Il avait passé quelques jours en Toscane à écouter les découvertes du grand Galilée et de ses élèves Torricelli et Cavalieri. À travers une merveilleuse lunette, il avait vu de ses yeux les quatre satellites de Jupiter et il avait appris, sur la pesanteur de l'air et la nouvelle géométrie, bien plus que ce qu'il aurait pu espérer quand il avait décidé d'entreprendre cette aventure italienne.

Ce soir, il était surtout pressé de revoir le Conseiller au Parlement, Pierre de Fermat, qui lui avait écrit une lettre enthousiaste : j'ai trouvé, lui disait Fermat, une merveilleuse démonstration relative à la science des nombres ; elle est trop longue pour vous l'écrire mais elle vous ravira lorsque je vous la dirai…



Ce que Fermat dit à Mersenne ce soir là commençait ainsi :

— Vous connaissez cette belle figure qui illustre l'égalité $3^2 + 4^2 = 5^2$.

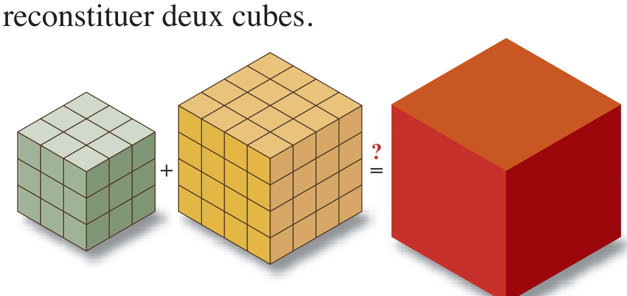


Le problème des carrés

Et vous savez qu'il y a beaucoup de nombres entiers a, b, c tels que $a^2 + b^2 = c^2$, c'est-à-dire qu'il est possible de découper un carré en petits carrés, de façon à pouvoir reconstituer deux carrés.

— Le génial Pythagore savait déjà cela il y a 2000 ans, je crois, répondit Mersenne, étonné par l'excitation de Fermat.

— Oui, mais ce qui est vrai pour le nombre 2 ne l'est pas pour le nombre 3 ! Car il est impossible de découper un cube en petits cubes, de façon à pouvoir reconstituer deux cubes.



Le problème des cubes

— Vous prétendez qu'il est impossible, Monsieur Fermat, qu'il existe trois nombres entiers a, b, c, tels que $a^3 + b^3 = c^3$.
— Non seulement cela, mais il est aussi impossible, Monsieur, qu'**il existe trois nombres entiers a, b, c, tels que $a^n + b^n = c^n$, et cela pour n'importe quelle puissance n plus grande que 2** !
Le père Mersenne resta pensif quelques instants et tenta de se faire expliquer la démonstration que Fermat disait avoir trouvée…
En fait personne n'a jamais vu écrite la démonstration de Fermat.

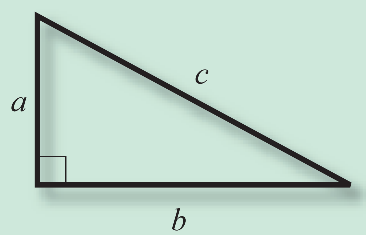
De sorte que le « **théorème de Fermat** » a intrigué les mathématiciens (petits et grands)… pendant trois siècles et demi !
Des quantités de démonstrations fausses furent proposées jusqu'à ce que, en 1993, l'anglais Andrew Wiles "fasse la une" des journaux du monde entier ; il avait trouvé, avec la collaboration d'un de ses élèves, Richard Taylor, ce qui est une sorte de Graal mathématique : une juste et belle démonstration qu'une centaine de mathématiciens au monde ont pu lire, comprendre, valider et peaufiner…

? 13

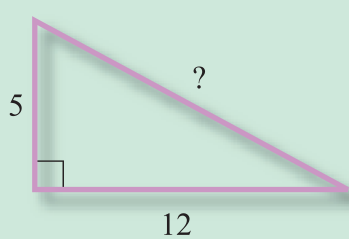
Sachant que les côtés a, b, c d'un triangle rectangle vérifient la relation, dite de Pythagore :

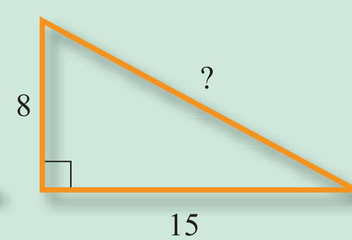
$$a^2 + b^2 = c^2,$$

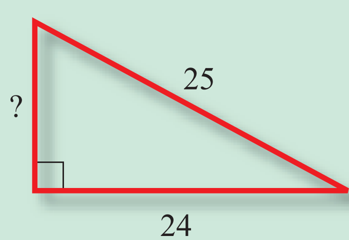
et grâce à la table de carrés ci-dessous, **trouve la longueur du côté qui manque**.

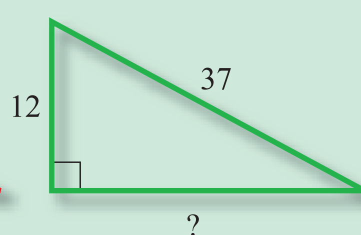


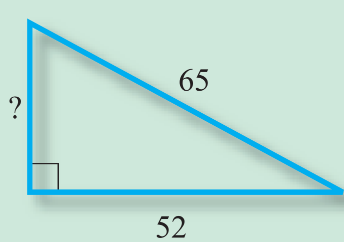
				50	2500	100	10000
1	1	49	2401	51	2601	99	9801
2	4	48	2304	52	2704	98	9604
3	9	47	2209	53	2809	97	9409
4	16	46	2116	54	2916	96	9216
5	25	45	2025	55	3025	95	9025
6	36	44	1936	56	3136	94	8836
7	49	43	1849	57	3249	93	8649
8	64	42	1764	58	3364	92	8464
9	81	41	1681	59	3481	91	8281
10	100	40	1600	60	3600	90	8100
11	121	39	1521	61	3721	89	7921
12	144	38	1444	62	3844	88	7744
13	169	37	1369	63	3969	87	7569
14	196	36	1296	64	4096	86	7396
15	225	35	1225	65	4225	85	7225
16	256	34	1156	66	4356	84	7056
17	289	33	1089	67	4489	83	6889
18	324	32	1024	68	4624	82	6724
19	361	31	961	69	4761	81	6561
20	400	30	900	70	4900	80	6400
21	441	29	841	71	5041	79	6241
22	484	28	784	72	5184	78	6084
23	529	27	729	73	5329	77	5929
24	576	26	676	74	5476	76	5776
		25	625			75	5625

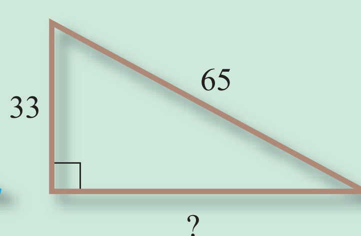


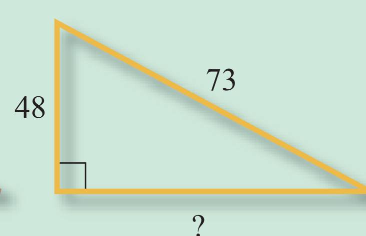












De gauche à droite et de haut en bas les dimensions des triangles rectangles sont :
(5, 12, 13), (8, 15, 17), (7, 24, 25), (12, 35, 37), (39, 52, 65), (33, 56, 65), (48, 55, 73).

Solutions Solutions Solutions Solutions Solutions

1• On lit, de gauche à droite en haut : 340 ; 12 ; 192 ; puis, II peut représenter 2, mais aussi 120.

2• a) ◀◀IIIIIII = 27, ◀◀◀◀◀III = 53, ◀◀◀IIII = 34.
b) 856 = 14 × 60 + 16 = 14 soixantaines et 16 unités = ◀IIII◀IIIIII.

3• Les mesures des angles en degrés utilisent beaucoup 60 et 6 × 60 ; certainement à cause de la facilité de construction d'un angle de 60°. La mesure du temps, les heures, minutes, secondes sont aussi un souvenir de la base 60.

4• 22, 1, 2, 18, 15 ; V, A, B, R, O ; BRAVO.

5• $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}=\frac{32}{64}+\frac{16}{64}+\frac{8}{64}+\frac{4}{64}+\frac{2}{64}+\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$. Thot dut rajouter $\frac{1}{64}$.

6• D'une part, le père, dans le testament n'a pas distribué tout son avoir car la somme 1/2 + 1/3 + 1/9 ne fait pas 1, mais 17/18. D'autre part, le nombre de chameaux, 17, n'est pas divisible par 2, ni par 3, ni par 9. Les volontés du père ne peuvent donc pas être respectées exactement ; mais, avec la solution du mathématicien, tout le monde a un peu plus. Du coup tout le monde est content, y compris le vieux père dans sa tombe.

7• $\frac{3}{2}+\frac{1}{5}=\frac{3\times 5}{2\times 5}+\frac{1\times 2}{5\times 2}=\frac{15}{10}+\frac{2}{10}=\frac{17}{10}$. 1,5 + 0,2 = 1,7. (Les termes des deux sommes sont égaux.)

8• La diagonale mesure 7,071… unités, soit entre 7 et 7,1 ; ce qu'un dessin précis t'aura permis de remarquer.

9• réponse C (qui correspond à un diamètre d'un peu moins de 2 cm à la base du pouce).

10• $1 + 3 = 4 = 2^2$. $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$. $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$. $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$.
La somme des n premiers nombres impairs vaut n^2. La somme proposée a 10 termes et vaut donc $10^2 = 100$.

11• Si on tape le calcul directement, la calculatrice donne le résultat en « notation scientifique ».

×	1220 M	703 125
8 192	9 994 240 M	5 760 M = 5 760 000 000

En ajoutant 9 994 240 M + 5 760 M, on trouve 10 000 000 millions tout juste. Cela provient du fait que $8192 = 2^{13}$ (un produit de 13 facteurs égaux à 2) et que $1\,220\,703\,125 = 5^{13}$ (un produit de 13 facteurs égaux à 5) donc le produit final est bien 10^{13}.

12• Il reste moins d'un millième du trésor lorsque le dixième a pris sa part (exactement 1/1024).

Si le monde entier se le partage, il n'y a presque plus rien à partager. On peut dire que si le nombre de personnes “tend vers l'infini”, le trésor tend à être complètement distribué.

13• De gauche à droite et de haut en bas les dimensions des triangles rectangles sont :
(5, 12, **13**), (8, 15, **17**), (**7**, 24, 25), (12, **35**, 37), (**39**, 52, 65), (33, **56**, 65), (48, **55**, 73).

14• 23, 37 et 89. **15•** Fais des essais. **16•** 2, 3, 5, 11, 23, 29, 41, 53, 83, 89.

17• 84 a 3 diviseurs premiers : 2, 3, 7. Et 117 a 2 diviseurs premiers : 3 et 13. Les entiers 8, 16, 64,… , 27, 81,… n'ont chacun qu'un seul diviseur premier. 210 = 2 × 3 × 5 × 7 a quatre diviseurs premiers.

18• La propriété des parts égales n'est vraie que pour des nombres positifs. Elle peut être fausse quand certains des nombres sont négatifs, en particulier, dans le cas présent, où $a = d$ = opposé de b = opposé de c.
Il faut faire attention avec les nombres négatifs et l'ordre des nombres, on fait facilement des erreurs.

19• $(-1)\times(-1+1)=\big((-1)\times(-1)\big)+\big((-1)\times 1\big)$ donc $(-1)\times 0=\big((-1)\times(-1)\big)+\big(-1\big)$ et $0=\big((-1)\times(-1)\big)+\big(-1\big)$. $(-1)\times(-1)$ est donc l'opposé de -1 qui est 1.

20• 28→14→7, le bibix de 28 est 2. 32→16→8→4→2→1, le bibix de 32 est 5. 34→17, le bibix de 34 est 1. Les nombres dont le bibix vaut 0 sont les impairs. Les nombres dont le bibix vaut au moins 1 sont les pairs. Les nombres dont le bibix vaut au moins 3 sont les multiples de 8.