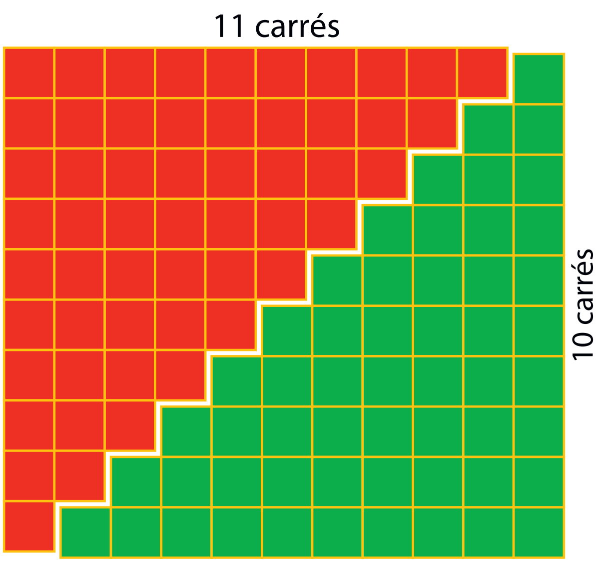
Le calcul de Gauss

L'histoire racontée dans la bande dessinée ci-contre s'est déroulée à peu près ainsi il y a 230 ans dans une école de Prusse où Charles-Frédéric Gauss était élève. Cela fait, en tout cas, partie de la légende des mathématiques.
On raconte aussi que le jeune Gauss (1777-1855) vérifiait les calculs de son père sur les feuilles de paye des ouvriers chargés de l'entretien des canaux du duché de Brunswick…

Voici, ci-dessous, une figure qui « montre » que la somme des n premiers entiers vaut $\dfrac{n(n+1)}{2}$.



$2 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) = 10 \times 11$

Les nombres de la forme

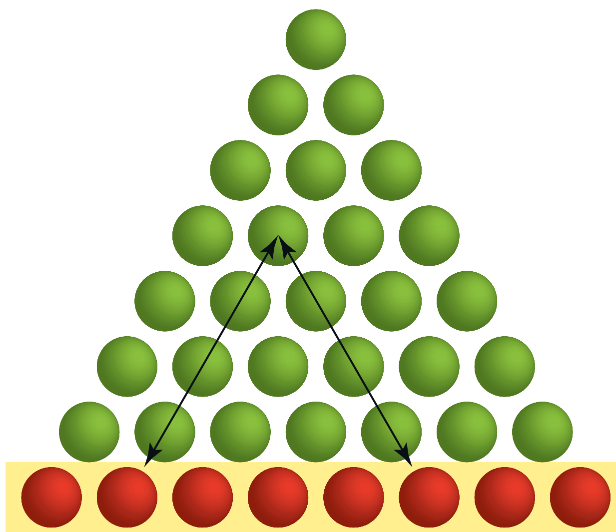
$$\frac{n(n+1)}{2}$$

s'appellent des nombres « triangulaires ».
En effet, à partir d'une base de n objets, on peut construire une sorte de pyramide triangulaire de $\dfrac{n(n+1)}{2}$ objets.
Les premiers nombres triangulaires sont
1 3 6 10 15 21 28 36 45 55 …
(2016 est le 63^{e} nombre triangulaire !)

On rencontre souvent ces nombres en mathématiques, parfois lorsqu'on ne s'y attend pas !

Nombre de paires parmi *n* choses

Par exemple, le nombre de poignées de mains qu'échangent un groupe de $n+1$ personnes se saluant toutes les unes les autres est le $n^{\text{ème}}$ nombre triangulaire : $\dfrac{n(n+1)}{2}$.



La figure ci-dessus en est une belle et astucieuse démonstration : en effet, on y voit que choisir une paire de disques rouges parmi les n de la base est exactement la même chose que choisir un des disques verts au-dessus de la base.
On en déduit par exemple, ici, que :
parmi 8 personnes, il y a exactement $\dfrac{7 \times 8}{2}$ paires possibles, soit 28.


Pfiou... Les 6èmes sont bien agités aujourd'hui !.. Tiens, ça devrait les calmer un moment...
Les enfants ! Vous allez me calculer la somme des 100 premiers nombres entiers, sans calculatrice !
Et toc !
1 + 2 + 3 +...
...+ 99 + 100 = ?
Mhmm... Ça me rappelle le calcul de Gauss...
Je vais faire un petit schéma pour m'aider...
Un petit escalier...
Ça y est !
Ça fait 5050 madame !
C'est cela, Alice !
Si vite...
Mais comment as-tu fait ?..