

Les myriades de grains de sable d'Archimède

J'ai la **mégaforme** aujourd'hui, s'exclama Matt en arrivant chez Alice. Et peut-être même la **gigaforme** !

— Je vois que tu connais les préfixes grecs choisis par la XIX^e conférence générale des poids et mesures de 1991 pour indiquer les multiplications par des puissances de dix, fit Kangy, en sortant le tableau qu'il avait trouvé dans une revue d'informatique :

déca :	× 10
hecto :	× 100
kilo :	× 1000
méga :	× 1 000 000
giga :	× 1 000 000 000
téra :	× 1 000 000 000 000
péta :	× 1 000 000 000 000 000
exa :	× 1 000 000 000 000 000 000



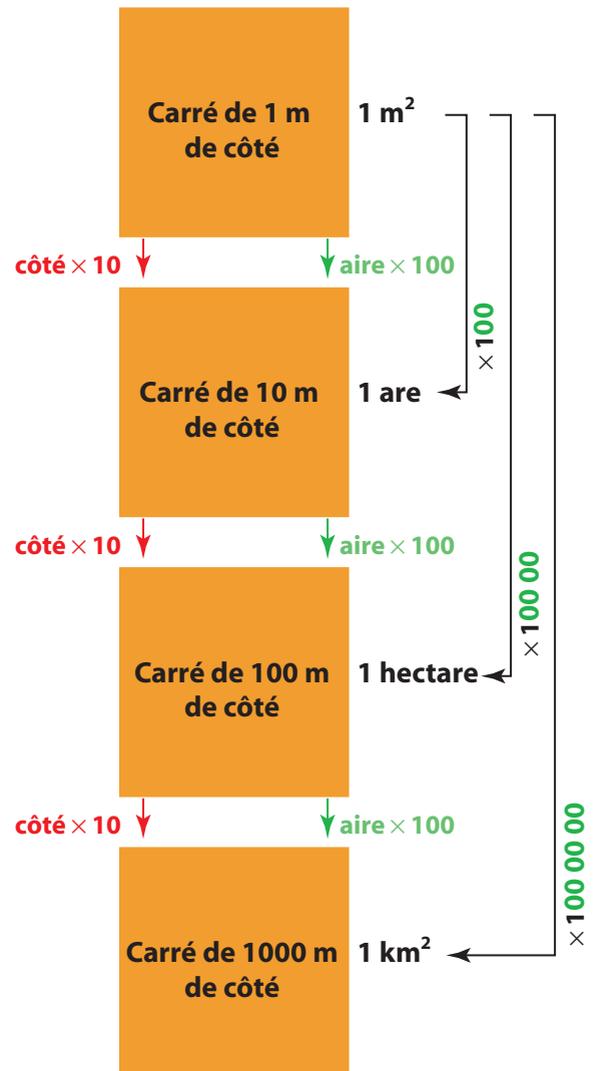
— Mais connais-tu le préfixe associé à 10 000 ? C'est **myria** ! En fait, les Grecs (ceux de l'Antiquité) ne comptaient pas plus loin que dix mille. Et, comme ils parlaient de *kiliades* pour les milliers, ils parlaient de *myriades* pour les dizaines de milliers.

— Myriade, c'est un joli mot... dit Matt. J'aime tes myriades de cheveux, Alice...

[Sur la page de droite, lecteur, tu vois une myriade d'étoiles.]

— Et, intervint Kangy, plus terre à terre, savez-vous qu'un **hectare**, c'est une **myriade** de mètres carrés ?

Regardez bien cet utile schéma...



Alors, si l'on vous parle d'un terrain de 600 hectares, pensez : 100 hectares = 1 km².

6 = 2 × 3.

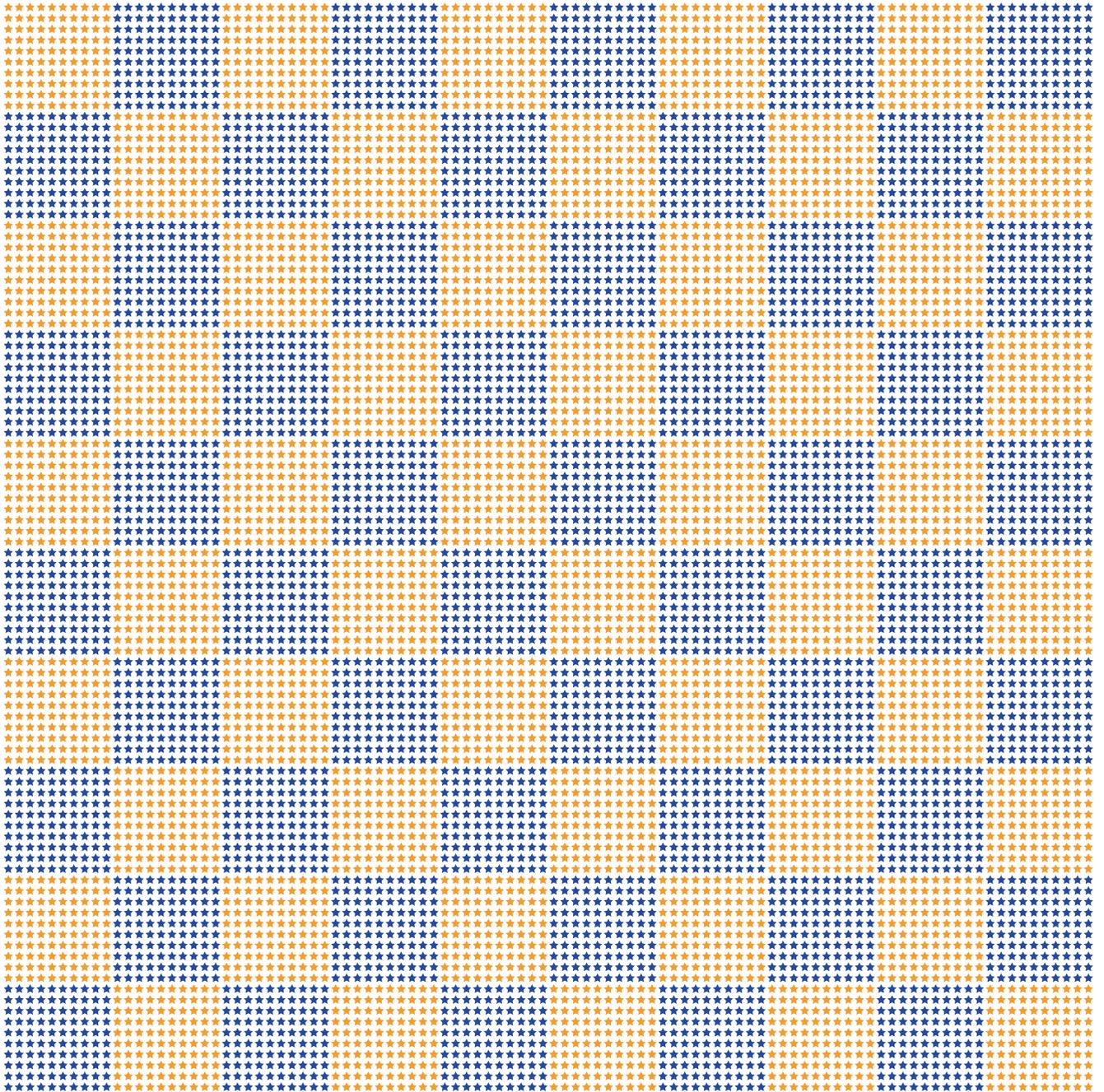
Le terrain pourrait faire 2 km sur 3 km.

Cela donne une bonne idée de la grandeur du terrain.

Une myriade d'étoiles

1 myriade = 1 00 00 = 1 00 × 1 00.

En dessinant les étoiles à 2 mm les unes des autres, on peut représenter, sur un carré de 20 cm × 20 cm, **une myriade d'étoiles**. (Nous les avons ici un peu plus serrées pour tenir sur la largeur d'une page.)



100 myriades = 1 00 × 1 00 00 = 1 00 00 00 = 1 000 000 = 1 000 × 1 000 = 1 million !

Pour “voir” un million d'étoiles, il vous suffit de mettre 100 carrés comme celui-ci les uns à côté des autres, 10 horizontalement et 10 verticalement : 100 = 10 × 10. Cela ne fait, finalement que moins de 2 mètres sur 2 mètres. À vos photocopies !

Revenons à nos anciens Grecs.

Il est vrai que les noms de leurs nombres n'allaient pas plus loin que la myriade (dix mille). Mais, vous allez voir comment s'en sortait le génial mathématicien ingénieur Archimède pour parler de nombres bien plus grands.

Il vivait vers 250 av. J.-C. en Sicile et parmi les nombreuses œuvres mathématiques dont il fut l'auteur, l'une est assez curieuse ; elle a pour titre l'*Arénaire*, ou « la plage de sable ». Archimède y montre qu'il est capable d'écrire un nombre qui serait plus grand que celui des grains de sable qui rempliraient l'Univers.

(Pour Archimède, l'Univers est la "sphère des étoiles fixes" où sont supposés se trouver le Soleil et toutes les étoiles.)

Ce nombre n'était donc ni infini, ni inaccessible à l'intelligence humaine...

Voici des extraits de son calcul.

D'aucuns pensent, roi de Gela (*Gela et Syracuse étaient alors les deux villes les plus importantes de Sicile*), que le nombre des grains de sable est infiniment grand ; et ils visent ainsi, non seulement le sable des environs de Syracuse et du reste de la Sicile, mais encore celui qui gît dans toute contrée habitée ou inhabitable. D'autres soutiennent que ce nombre n'est pas infini, mais que l'on ne pourrait pas en énoncer un qui fût assez grand pour surpasser la multitude de ces grains de sable. Or, je tâcherai de te faire voir, au moyen de démonstrations géométriques dont tu pourras suivre les raisonnements, que **certains nombres surpassent non seulement le nombre des grains de sable dont le volume serait égal à celui de la terre, mais encore le nombre de grains de sable dont le volume serait égal à celui du monde.**

Dès lors, je dis que, si l'on composait une sphère de sable aussi grande qu'Aristarque suppose être la sphère des étoiles fixes, on démontrerait, moyennant les données qui vont suivre, que, parmi les nombres, certains surpasseraient le nombre des grains de sable dont le volume serait égal à celui d'une pareille sphère.



Archimède, d'après un ouvrage du XVI^e siècle

Admettons d'abord que le périmètre de la Terre ait une longueur inférieure à trois cents myriades de stades. Il est vrai que d'autres, comme Eratosthène, ont tenté de démontrer que cette longueur est de trente myriades de stades.

Un « stade » mesure environ 160 de nos mètres.

Trente myriades de stades, cela vaut donc environ 48 000 kilomètres, ce qui n'est pas une mauvaise approximation pour l'époque.

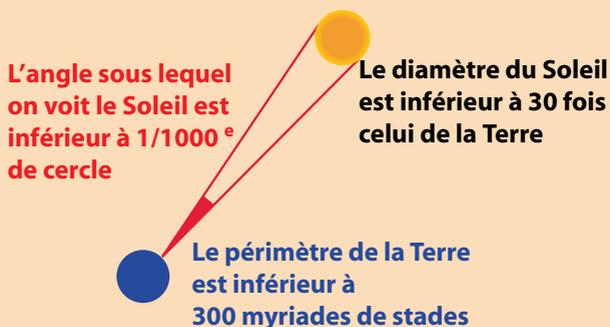
Mais moi, allant plus loin, et regardant cette **dimension de la Terre** admise par mes devanciers comme étant environ dix fois plus grande, je suppose que **son périmètre est à peu près de trois cents myriades de stades, mais pas davantage.**

Je suppose encore que **le diamètre du Soleil est trente fois plus grand que celui de la Terre, mais pas davantage.**

Bien que, parmi les astronomes qui nous ont précédés, Eudoxe ait déclaré qu'il était neuf fois aussi grand, Phidias, mon père, douze fois aussi grand, et qu'Aristarque ait essayé de démontrer que le diamètre du Soleil était plus grand que dix-huit fois et plus petit que vingt fois le diamètre de la Terre. Or, moi, je vais même au-delà de ce dernier, afin que ma proposition soit démontrée sans contestation. Et j'ai moi-même vérifié ce qu'Aristarque a trouvé : **le Soleil nous apparaît comme étant à peu près le sept cent vingtième du cercle du zodiaque, donc moins d'un millième de cercle.** Ces choses étant admises, on peut démontrer alors que le diamètre du monde est plus petit que dix mille fois le diamètre de la terre, et donc que **le diamètre du monde est plus petit que cent myriades de myriades de stades.**

Question Jeu 6

En admettant les données ici rappelées, **montrer que le diamètre du monde est inférieur à 100 myriades de myriades de stades.**



Telles sont les choses que j'admets au sujet des grandeurs et des distances, et voici maintenant pour ce qui concerne le sable.

Si l'on rassemble un volume de sable non supérieur à une graine de pavot, le nombre de grains ne dépassera pas dix mille, tandis que le diamètre d'une graine de pavot n'est pas inférieur à un quarantième de doigt.

Compte tenu de cette évaluation (il y a une myriade de grains dans une sphère de diamètre égal à un quarantième de doigt), Archimède

calcule alors le nombre de grains de sable pouvant remplir l'Univers (une sphère de diamètre égal à cent myriades de myriades de stades). Pour cela la numération grecque ne lui fournit les noms des nombres que jusqu'à une myriade (10 000, c'est-à-dire, pour nous, 10^4).

Il pourrait ensuite compter jusqu'à 10 000 myriades et parler de myriade de myriades. Puis viendraient les myriades de myriades de myriades, ... mais il préfère alors inventer un vocabulaire plus pratique :

Dès lors, appelons primes les nombres allant de l'unité, 1, jusqu'à dix mille myriades ; appelons unité des nombres seconds dix mille myriades d'unités des nombres primes. Et appelons unité des nombres troisièmes dix mille myriades d'unités des nombres seconds, et ainsi de suite pour les nombres quatrièmes, cinquièmes, sixièmes, septièmes, ...

Et Archimède arrive ainsi à montrer que **la quantité de grains de sable, dont le volume égale celui du monde, tel que se le représentent beaucoup d'astronomes, est plus petite que mille unités des nombres septièmes.**

Je conçois, roi de Gela, que ces choses paraîtront incroyables à la plupart de ceux auxquels les mathématiques ne sont point familières ; mais ceux qui y sont versés et qui ont médité sur les distances et les grandeurs de la terre, du soleil et du monde entier, les admettront après ma démonstration. Et c'est pourquoi j'ai cru qu'il n'était pas hors de propos que, toi aussi, tu en prennes connaissance.

On le voit, les gouvernants de l'époque d'Archimède étaient certainement plus portés aux mathématiques que ceux d'aujourd'hui !

Question Jeu 7

Vérifier le calcul d'Archimède...

Sachant que 10000 doigts mesurent 1 stade, **montrer que le nombre de grains de sable de l'Univers est certainement inférieur au nombre qui s'écrit 1 suivi de 51 zéros, c'est-à-dire 10^{51} .** Et **expliquer pourquoi ce nombre vaut 1000 unités des nombres septièmes.**

SOLUTIONS

e

QJ 6. Archimède suppose le tour C de la Terre égal à 300 myriades de stades, donc son diamètre D inférieur à 100 myriades de stades ($D \times 3 \approx C$, car $\pi \approx 3$).

Le diamètre du Soleil est alors supposé inférieur à 30×100 myriades de stades et donc le périmètre du monde à $30 \times 100 \times 1000$ myriades de stades. Le diamètre du monde est donc inférieur à **100000 myriades** de stades, soit **100 myriades** de myriades de stades.

QJ 7. Il faut 40 diamètres de graine de pavot pour faire un doigt et 10 000 doigts pour faire un stade. Il faut donc **40 00 00** graines de pavot pour faire un stade et le diamètre du monde est de 100 **0000 0000** stades.

Le diamètre du monde est donc **4 suivi de 15 zéros** fois celui d'une graine de pavot. Le volume du monde est donc **64 suivi de 45 zéros** fois celui d'une graine de pavot. Ce nombre est inférieur à **1 suivi de 47 zéros**. Mais il y a moins de 10 000 grains de sable dans une graine de pavot. Finalement, le nombre est inférieur à **1 suivi de 51 zéros**.

1 unité des nombres seconds vaut dix mille myriades, soit **1 suivi de 8 zéros**.

1 unité des nombres **troisièmes** vaut dix mille myriades d'unités des nombres seconds, soit **1 suivi de 2×8 zéros**...

1 unité des nombres **septièmes** vaut dix mille myriades d'unités des nombres sixièmes, soit **1 suivi de 6×8 zéros**, soit 1 suivi de 48 zéros.

1000 unités de nombres septièmes vaut donc 1 suivi de 51 zéros.