Périmètre du cercle et aire du disque

La bande dessinée de la page ci-contre montre ceci :

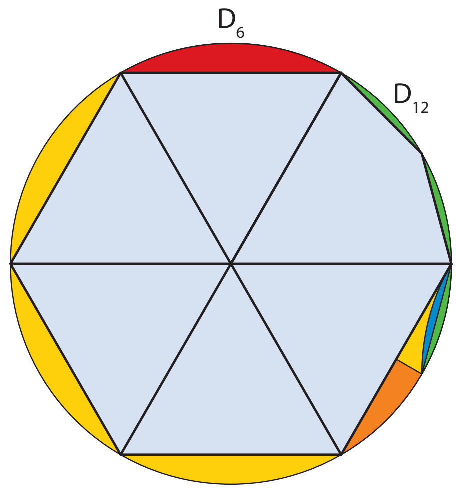
Si l'on sait que le périmètre d'un cercle est proportionnel à son diamètre, alors l'aire d'un disque est proportionnelle au carré de son rayon (avec le même coefficient de proportionnalité) !

Suite aux découvertes d'Archimède sur la mesure du cercle, ce coefficient est aujourd'hui nommé π (comme la première lettre du mot grec signifiant périmètre).

En fait, il manque un maillon important dans la démonstration de la bande dessinée :

Comment être sûr, en effet, que la différence entre l'aire du cercle et l'aire des polygones inscrits dans le cercle va devenir totalement nulle quand le nombre de côtés des polygones augmente indéfiniment ?

Archimède, par Giuseppe Patania



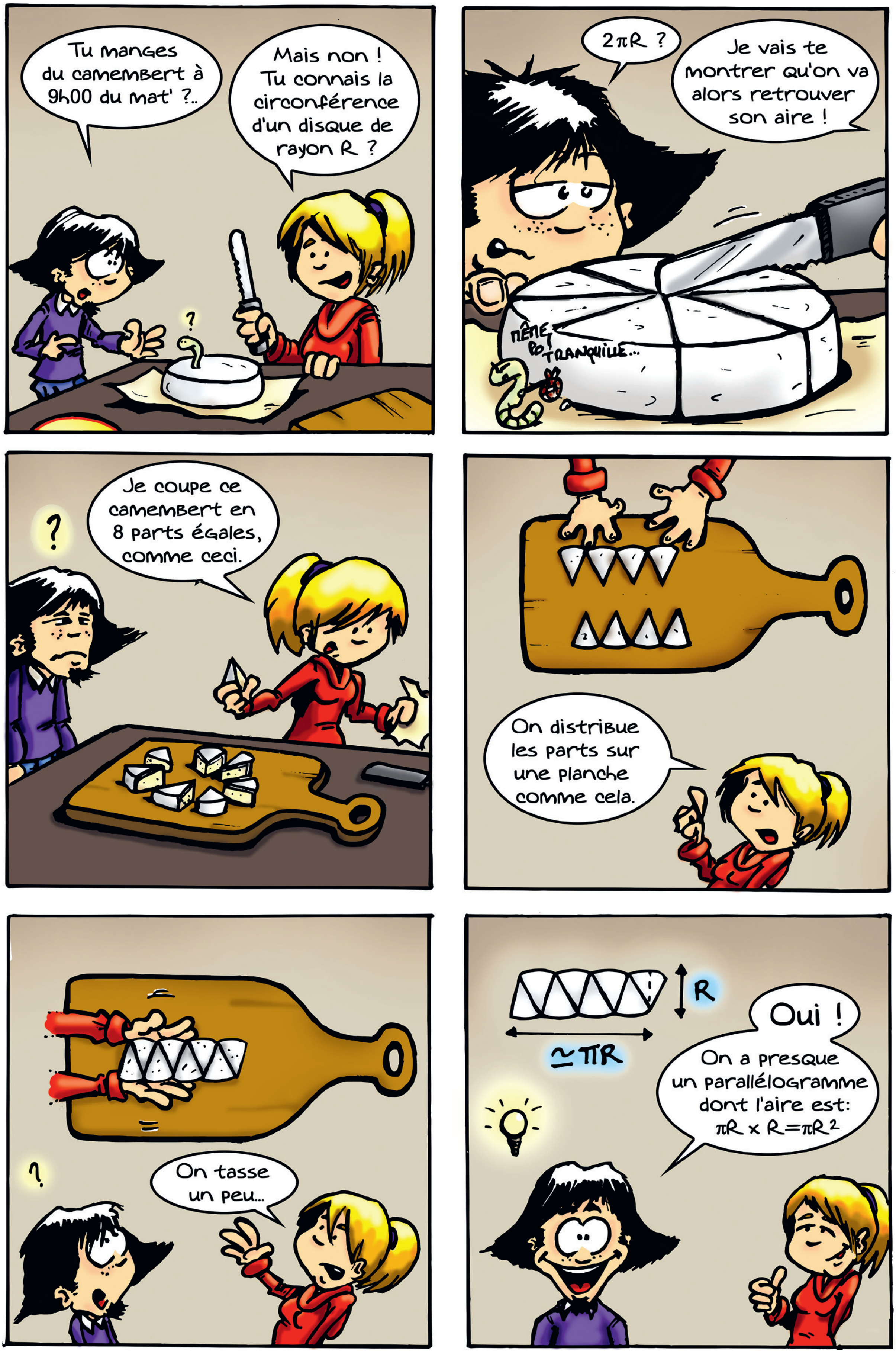
C'est la proposition 1 du livre X des *Éléments* d'Euclide qui permet justement de répondre à cette question :

Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, et si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.

Autrement dit, à force de diviser par 2, on arrive aussi près de 0 que l'on veut !

Il en va ainsi de la différence entre l'aire des polygones ici considérés et l'aire du disque de rayon R, comme le montre l'argumentation suivante :

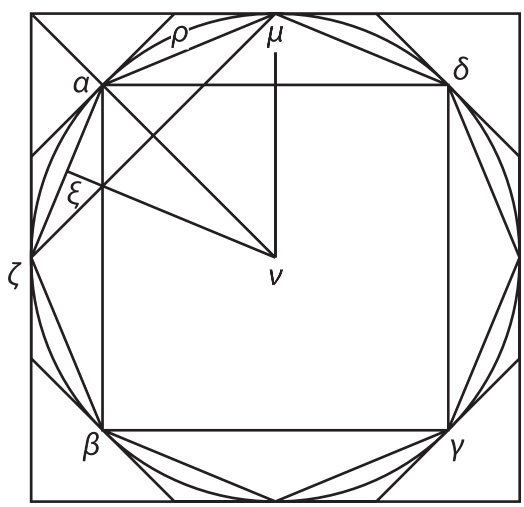
1. Regardons, en rouge, le sixième de la différence entre le disque et un certain polygone (ici, l'hexagone D_6).
2. Regardons, en vert, le douzième de la différence avec le disque pour un polygone ayant deux fois plus de côtés (D_{12}).
3. En doublant le morceau vert par son symétrique (bleu), nous voyons que ces deux morceaux (vert et bleu) restent à l'intérieur d'un demi-secteur rouge (puisqu'il y a encore la place du jaune). En passant du rouge au vert nous avons donc diminué la différence de plus de moitié.
4. Or, d'après la proposition d'Euclide, si on peut toujours diminuer quelque chose de moitié, c'est qu'on peut rendre cette chose aussi petite que l'on veut, c'est-à-dire nulle.



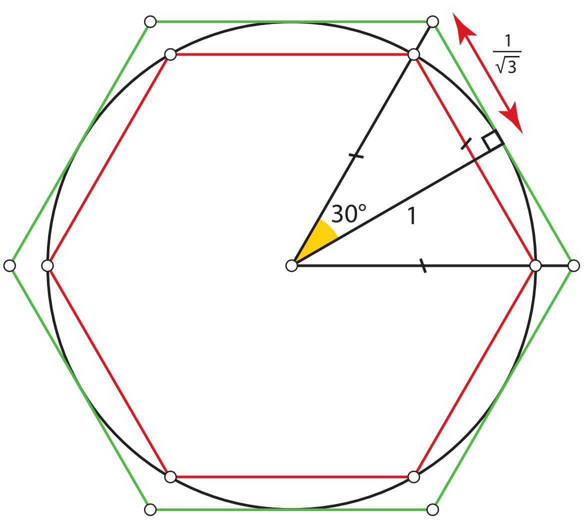
Tu manges du camembert à 9h00 du mat' ?..
Mais non ! Tu connais la circonférence d'un disque de rayon R ?
2πR ?
Je vais te montrer qu'on va alors retrouver son aire !
MÊME PO TRANQUILLE...
Je coupe ce camembert en 8 parts égales, comme ceci.
On distribue les parts sur une planche comme cela.
On tasse un peu...
R
~πR
Oui !
On a presque un parallélogramme dont l'aire est: πR x R=πR²

La mesure du cercle

La figure ci-dessous est extraite du chapitre intitulé ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ (*La mesure du cercle*), dans la première édition des œuvres complètes d'Archimède (Bâle, 1544).



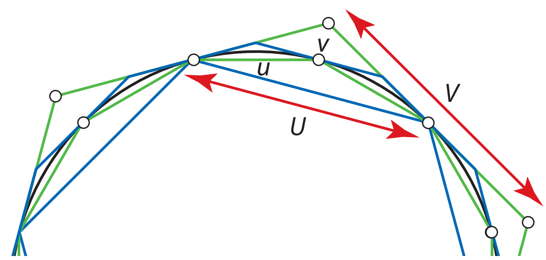
Dans ce chapitre Archimède explique le joli moyen qu'il a trouvé pour encadrer la longueur de la circonférence d'un cercle de rayon 1 : elle est en effet plus grande que le périmètre d'un polygone inscrit et plus petite que le périmètre d'un polygone circonscrit.
Il commençait par des hexagones.



Ainsi, sur la figure ci-dessus…
… le côté de l'hexagone inscrit est 1, et son périmètre est 6,
… et le côté de l'hexagone circonscrit est $2/\sqrt{3}$ (en effet la tangente de l'angle de 30° vaut $1/\sqrt{3}$, et son périmètre est $12/\sqrt{3}$ soit $4 \times 1{,}732\ldots$
Le périmètre du cercle de rayon 1 valant 2π, on trouve ainsi (en divisant ce périmètre par 2) un premier encadrement du nombre π :

$$3 < \pi < 3{,}465.$$

Archimède calcule ensuite les périmètres successifs des polygones, grâce à quelques relations (assez simples) entre les côtés U et V des polygones inscrits et circonscrits à n côtés et les côtés u et v des polygones inscrits et circonscrits à $2n$ côtés.



Voici ces relations :

n	U	V
$2n$	$u = \sqrt{\dfrac{Uv}{2}}$	$v = \dfrac{UV}{U+V}$

On remplit alors le tableau suivant, ligne à ligne.

n	côté du polygone inscrit	côté du polygone circonscrit	$\cdots < \pi < \cdots$	
6	1	1,154 700	3	3,464…
12	0,517 638	0,535 898	3,105…	3,215…
24	0,261 052	0,263 304	3,132…	3,159…
48	0,130 806	0,131 086	3,1393…	3,1460…
96	0,065 438	0,065 473	3,1410…	3,1427…

Ainsi avait fait Archimède au 3$^{\text{ème}}$ siècle avant J.-C. Et il avait obtenu le fameux encadrement :

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}.$$