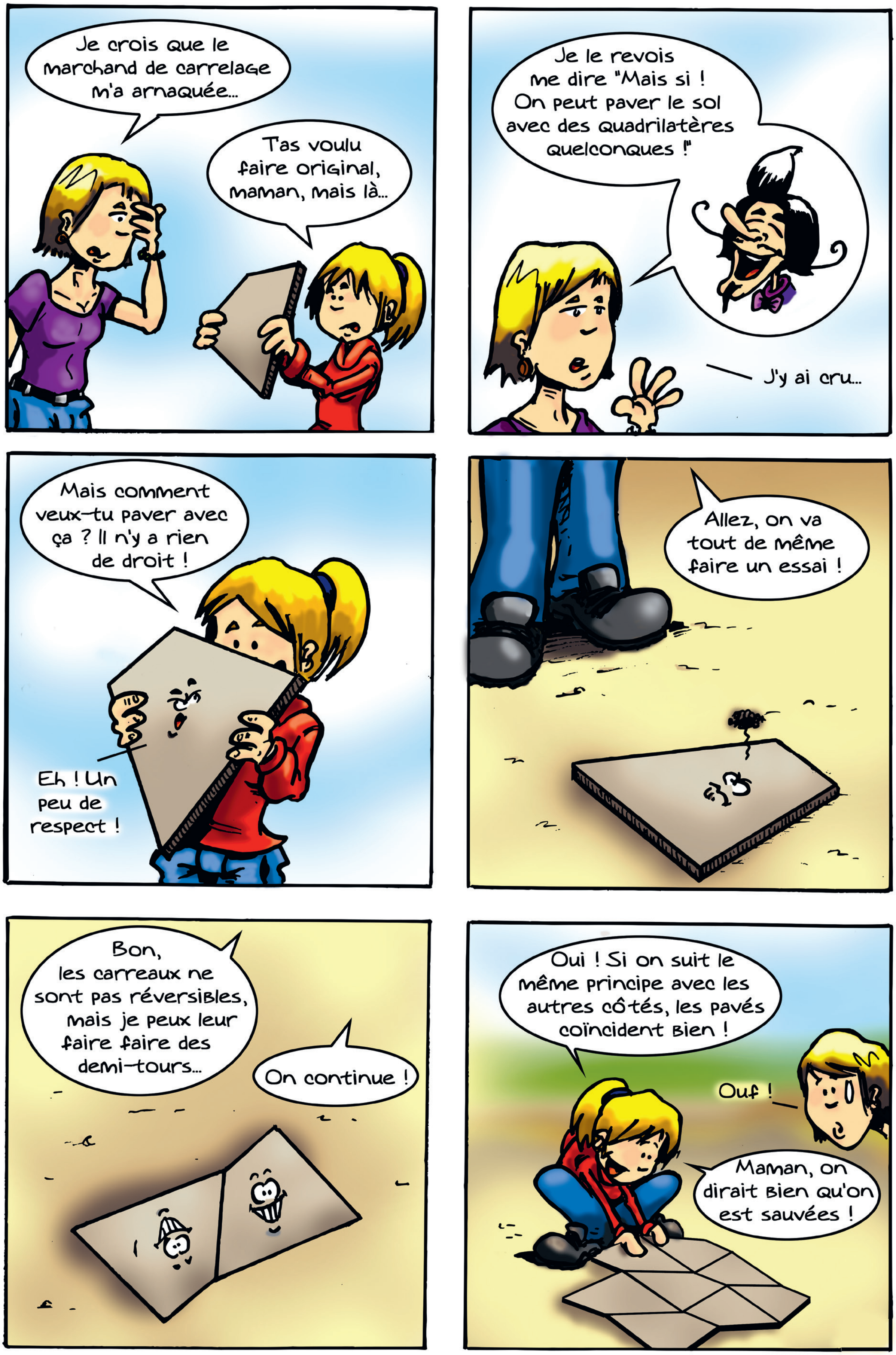
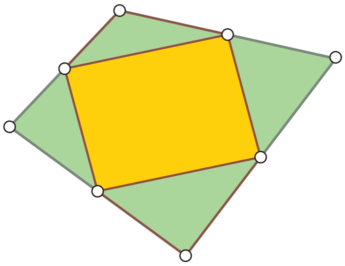
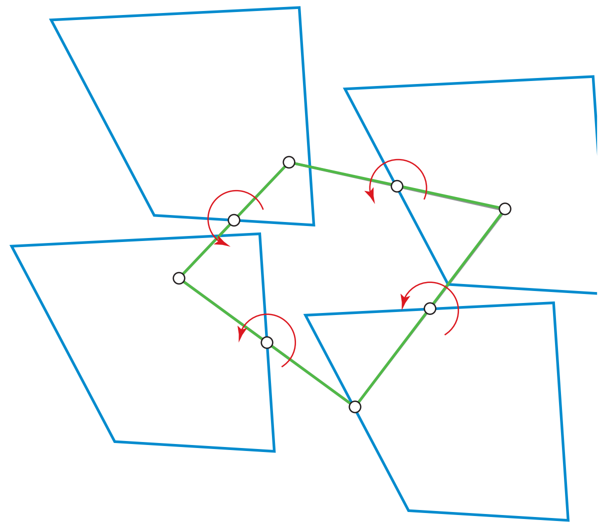


Je crois que le marchand de carrelage m'a arnaquée...
T'as voulu faire original, maman, mais là...
Je le revois me dire "Mais si ! On peut paver le sol avec des quadrilatères quelconques !"
J'y ai cru...
Mais comment veux-tu paver avec ça ? Il n'y a rien de droit !
Eh ! Un peu de respect !
Allez, on va tout de même faire un essai !
Bon, les carreaux ne sont pas réversibles, mais je peux leur faire faire des demi-tours...
On continue !
Oui ! Si on suit le même principe avec les autres côtés, les pavés coïncident bien !
Ouf !
Maman, on dirait bien qu'on est sauvées !

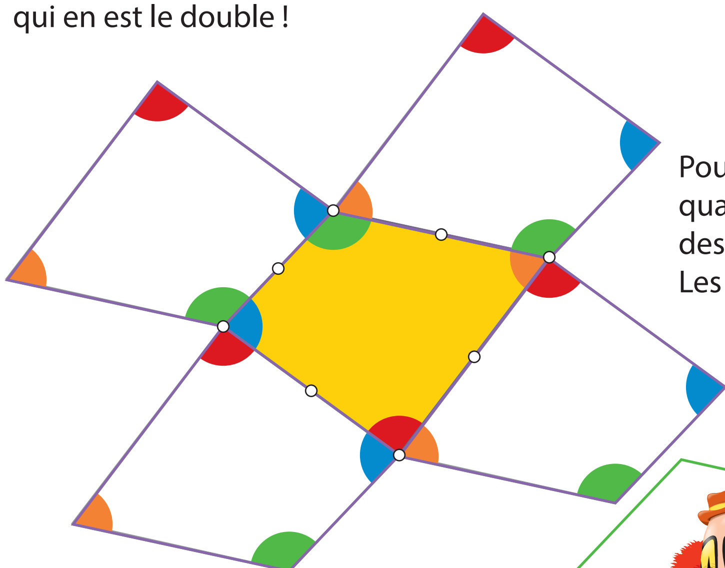
Paver avec des carreaux de 4 côtés, 5 côtés, 6 côtés

Dans tout quadrilatère, aussi bizarre soit-il, se cache un parallélogramme :

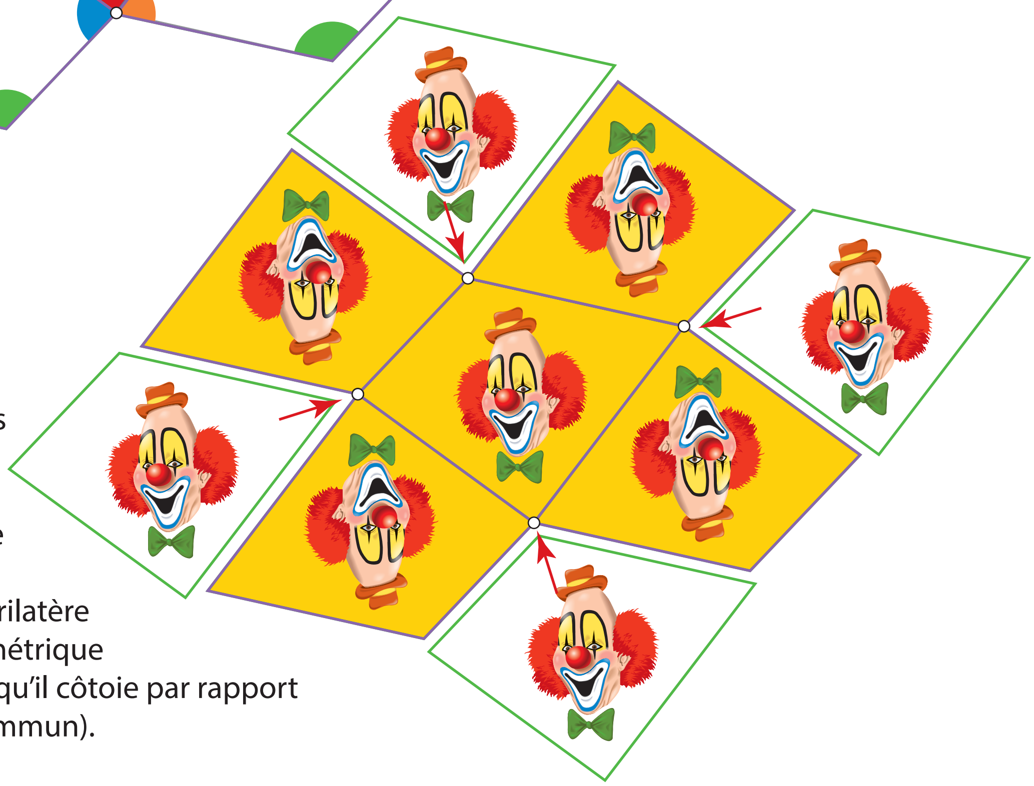




C'est l'un des trois premiers beaux théorèmes que l'on rencontre en géométrie : **le quadrilatère joignant les milieux des côtés d'un quadrilatère *quelconque* est, lui, un parallélogramme.**
Or on peut paver le plan avec un parallélogramme. D'une façon ou d'une autre, on doit donc pouvoir paver le plan avec un quadrilatère qui en est le double !

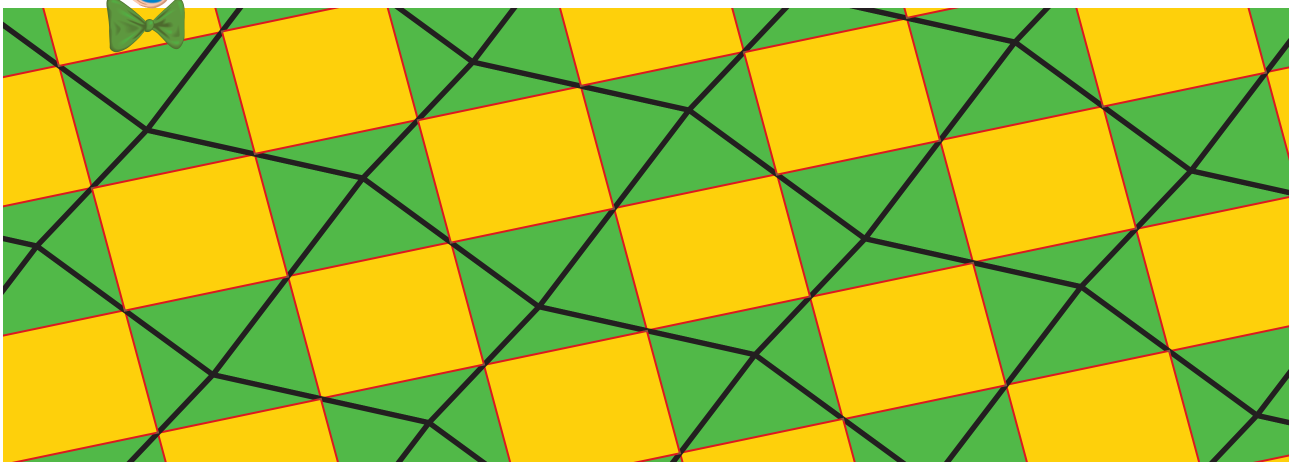


Pour construire un pavage, faisons tourner le quadrilatère d'un demi-tour autour de chacun des milieux de ses côtés.
Les égalités d'angles marquées sur la figure ci-contre se déduisent des propriétés de la symétrie centrale, en partant des angles du quadrilatère initial.

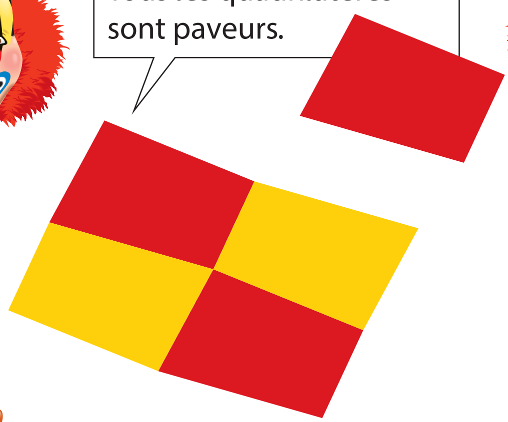


Mais attention, c'est extraordinaire !
La somme des angles d'un quadrilatère valant 360°, on peut donc, dans les quatre «coins» qui restent, juste glisser un quadrilatère (qui est d'ailleurs symétrique de chacun des deux qu'il côtoie par rapport au milieu du côté commun).

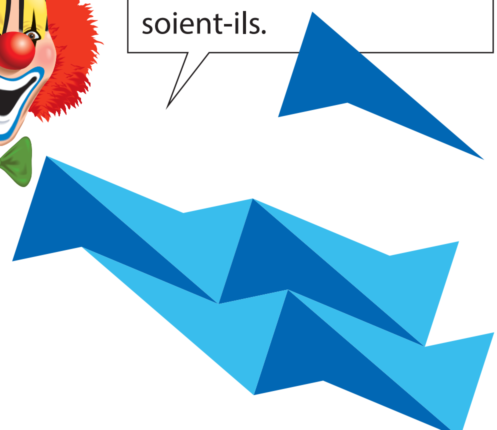
Et on peut
continuer ainsi à l'infini…



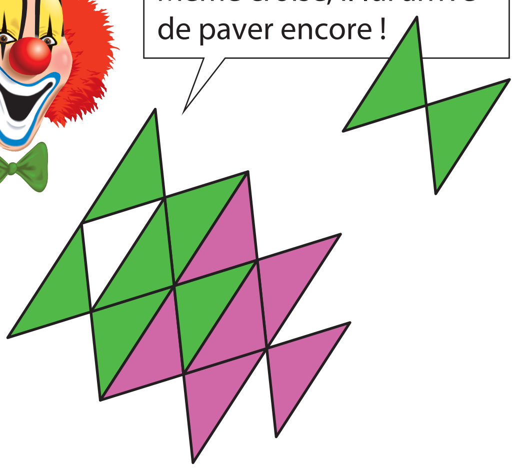
Tous les quadrilatères
sont paveurs.



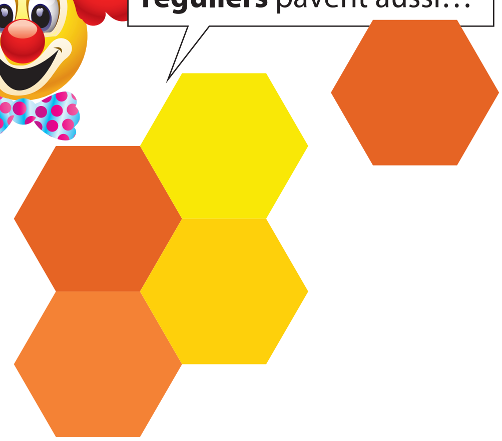
Aussi biscornus
soient-ils.

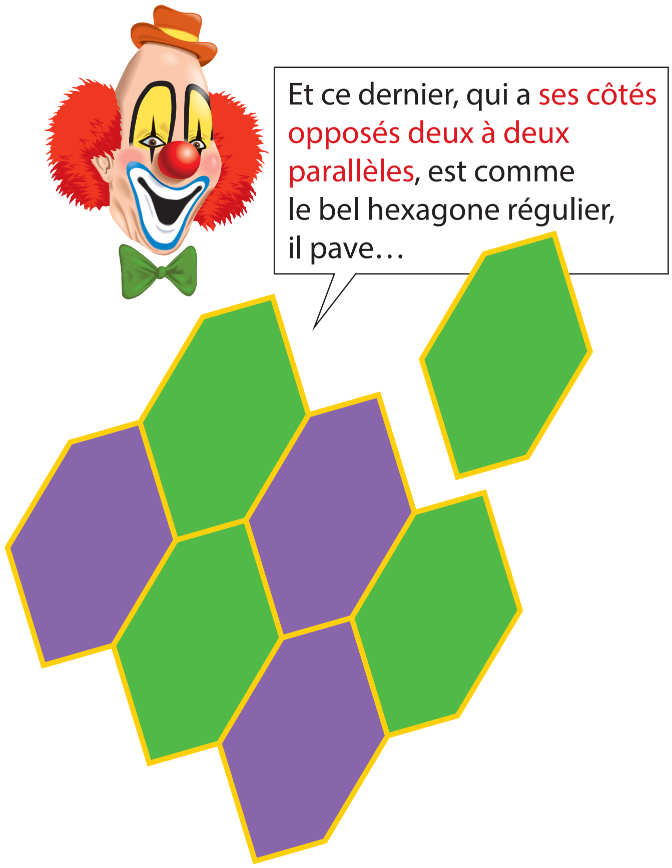


Même croisé, il lui arrive
de paver encore !



Mais… **les hexagones
réguliers** pavent aussi…



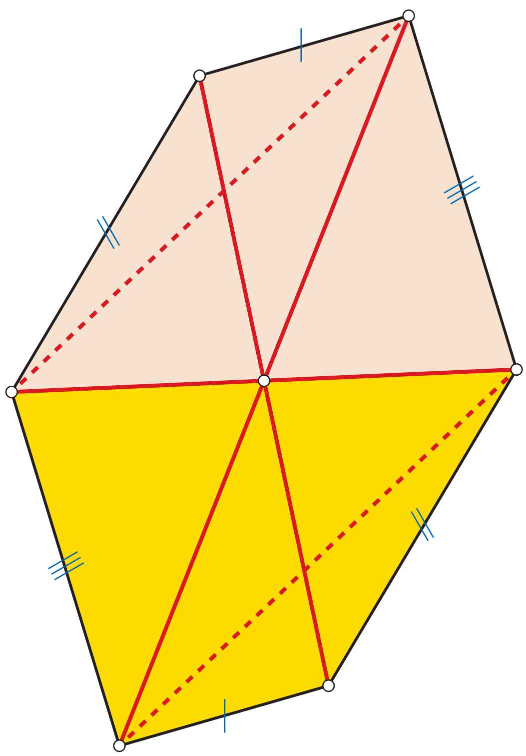


Aussi étonnant que cela paraisse au premier abord, de nombreux hexagones pavent le plan en vertu du théorème suivant :

Théorème des paveurs hexagonaux :

Si un hexagone a, deux à deux, ses côtés opposés parallèles et de même longueur, alors c'est un carreau qui pave le plan.

Démonstration : Si un hexagone a, deux à deux, ses côtés parallèles et de même longueur, alors ses diagonales (qui sont aussi celles de parallélogrammes) se coupent en leur milieu (voir la figure).
Et chacune de ces diagonales découpe cet hexagone en deux quadrilatères symétriques. Comme ce quadrilatère pave le plan par des symétries successives, l'hexagone (qui n'est qu'un couple accolé de deux tels quadrilatères symétriques, pave aussi le plan.



Quand à nous, nous n'avons rien de commun avec ces paveurs du plan… Nous sommes d'honnêtes pentagones, sans beaucoup de régularités ni de parallélogrammes cachés entre les milieux des côtés d'un quadrilatère !

Pourtant, il me semble apercevoir deux de vos côtés non adjacents, parallèles et de même longueur. Tournez-vous un peu pour voir ! Oui… autour du milieu du côté qui les touche, autour de votre « base ».

Damnation ! Par symétrie autour du milieu de ma base, chacun des côtés non adjacents parallèles a doublé de longueur et les deux derniers côtés se sont reproduits parallèlement par symétrie.

Je suis devenu un hexagone paveur (à côtés parallèles et de même longueur) ! Au secours, je me perds dans une multitude de clones…